



Petri Hilli

RISKINHALLINTA YKSITYISEN SEKTORIN TYÖELÄKKEIDEN RAHOITUKSESSA

HELSINKI SCHOOL OF ECONOMICS

ACTA UNIVERSITATIS OECONOMICAE HELSINGIENSIS

A-288

Petri Hilli

RISKINHALLINTA YKSITYISEN SEKTORIN
TYÖELÄKKEIDEN RAHOITUKSESSA

HELSINKI SCHOOL OF ECONOMICS

ACTA UNIVERSITATIS OECONOMICAE HELSINGIENSIS

A-288

© Petri Hilli and
Helsinki School of Economics

ISSN 1237-556X
ISBN 978-952-488-085-5

E-version:
ISBN 978-952-488-110-4

Helsinki School of Economics -
HSE Print 2007

Tiivistelmä

Tässä väitöskirjassa esitetään johdantokappaleen lisäksi viisi itsestä esseestä, jotka liittyvät työeläkejärjestelmän rahoituksen riskinhallintaongelmien kuvaamiseen, analysointiin ja ratkaisumenetelmiin. Ensimmäisessä esseessä esitetään aikasarjamalli, joka kuvaa työeläkelaitosten sijoitustuottoihin ja vakuutusliikkeen kassavirtoihin olennaisesti vaikuttavien taloudellisten epävarmuustekijöiden stokastiikkaa. Malli laajentaa Koivun, Pennasen ja Ranteen mallia lisäämällä siihen inflaation sekä jakamalla osakesijoitukset useampaan luokkaan. Lisäksi huomioidaan inflaation ja sijoitustuottojen välinen yhteys ja korkomalli on johdonmukaisempi. Toisessa esseessä esitetään yksinkertainen numeeriseen laskentaan soveltuva malli työeläkelaitoksen riskinhallintaan olennaisesti vaikuttaville vakuutusliikkeen kassavirroille ja vastuille. Malli mahdollistaa kassavirtojen ja vastuuvelan stokastisen kuvaamisen yksinkertaisten stokastisten prosessien avulla ja antaa konsistentteja tuloksia Eläketurvakeskuksen laskelmien kanssa. Kolmannessa esseessä esitetään alustavia laskelmia Hallituksen 8.6.2006 tekemän lakiesityksen vaikutuksesta työeläkevakuutusmaksuun pitkällä aikavälillä huomioiden sijoitustuottojen ja vakuutusliikkeen kassavirtojen epävarmuus. Lakiesityksen mukaisessa eläkejärjestelmässä maksun mediaani putoaisi noin 2-2,5%:a vuoteen 2034 mennessä, mutta tuleviin maksuihin liittyy huomattavaa epävarmuutta. Lopullinen maksu riippuu valittavista laskuperusteista. Neljännessä esseessä tutkitaan numeerisesti moniperiodisen stokastisen optimoinnin diskretointia käyttäen integrointikvadratuureja. Joustavana menetelmänä stokastinen optimointi soveltuu hyvin eläkelaitosten riskinhallintaongelmien ratkaisemiseen. Sen soveltaminen edellyttää lähes aina optimointiongelman diskretointia. Numeeristen testien perusteella integrointikvadratuurilla diskretoidun tehtävän optimiratkaisu konvergoituu nopeammin todelliseen optimiratkaisuun kuin usein käytetty Monte Carlo-menetelmä. Viidennessä esseessä esitetään stokastisen optimoinnin malli suomalaisen työeläkeyhtiön varojen ja vastuiden hallintaan ottaen huomioon Suomen työeläkejärjestelmän erityissäännökset. Numeeristen testien perusteella stokastisen optimoinnin avulla saavutetaan huomattavasti korkeimmat sijoitustuotot suhteessa konkurssiriskiin kuin usein vastaavissa tehtävissä sovelletuilla päätössäännöillä.

Avainsanat: Työeläkkeet, varojen ja vastuiden hallinta, riskinhallinta, aikasarjamallinnus, stokastinen optimointi, numeerinen analyysi.

Väitöskirja

Helsingin kauppakorkeakoulu
Liiketoiminnan teknologian laitos

Riskinhallinta yksityisen sektorin työeläkkeiden rahoituksessa

Tekijä: Petri Hilli

Ohjaajat: Professori Markku Kallio, Dosentti Teemu Pennanen

Esitarkastajat: Tutkimusjohtaja Lasse Koskinen,
Vakuutusvalvontavirasto
Professori, ylijohtaja Tarmo Pukkila,
Sosiaali- ja terveysministeriö

Vastaväittäjä: Professori, ylijohtaja Tarmo Pukkila,
Sosiaali- ja terveysministeriö

Esseet:

I Petri Hilli, Matti Koivu ja Teemu Pennanen:
”Sijoitustuottomalli työeläkelaitoksille”,
Vakuutusvalvontaviraston julkaisusarja 2006:3.

II Petri Hilli ja Teemu Pennanen:
”Työeläkelaitoksen kassavirta-vastuumalli”,
Vakuutusvalvontaviraston julkaisusarja (painossa).

III Petri Hilli:
”Sijoitusuudistuksen vaikutus yksityisen sektorin työeläkevakuutusmaksuun”,
julkaisematon.

IV Teemu Pennanen ja Petri Hilli:
”Numerical study of discretizations of multistage stochastic programs”,
julkaisematon.

V Petri Hilli, Matti Koivu, Teemu Pennanen ja Antero Ranne:
”A stochastic programming model for asset liability management of a
Finnish pension insurance company”,
Annals of Operations Research (to appear), reprinted with kind permission
of Springer Science and Business Media.

Kiitokset

Tein väitöskirjatutkimukseni työskennellessäni Helsingin kauppakorkeakoulussa kansantaloustieteen ja sittemmin liiketoiminnan teknologian laitoksella, liikkeenjohdon systeemit aineessa. Olen kiitollinen ohjaajilleni - dosentti Teemu Pennaselle ja professori Markku Kalliolle - korkeatasoisesta ohjauksesta, joka on huomattavasti parantanut väitöskirjani laatua. Väitöskirjani on toinen Teemu Pennasen johtaman ja Suomen akatemian rahoittaman projektin *Stokastinen optimointi ja sen sovellukset rahoituksessa* tuloksena syntynyt väitöskirja. Ensimmäisenä projektista väitteli entinen kollegani Matti Koivu, jonka kanssa tieteellinen yhteistyö on jatkunut tuloksekkaana myös hänen siirryttyä muihin tehtäviin. Kiitän Eläketurvakeskuksen henkilökuntaa, erityisesti Peter Biströmiä ja Ismo Riskua, rakentavista kommenteista ja ehdotuksista sekä tarvittavan aineiston toimittamisesta. Kiitän Lasse Koskista, Tarmo Pukkilaa, Heikki Palmia ja Antero Rannetta yhteistyöstä ja rakentavista kommenteista, jotka ovat suuresti auttaneet tutkimustyössäni.

Kiitän kaikkia laitoksen kollegoita hyvästä yhteistyöstä. Erityisesti kiitän professori Merja Halmetta, Maarit Kalliota, Outi Somervuorea, Leena Tannerta ja Hanna Virtaa kuluneista vuosista.

Kiitän perhettäni ja läheisimpiäni ymmärryksestä väitöskirjatyön asettamia kovia vaatimuksia kohtaan.

Kiitän systeemianalyysin, päätöksenteon ja riskinhallinnan tutkijakoulua, sosiaali- ja terveysministeriötä ja Helsingin kauppakorkeakoulun tukisäätiötä väitöskirjatutkimukseni rahoittamisesta.

Helsingissä, joulukuussa 2006

Petri Hilli

1 Johdanto

Suomen työeläkejärjestelmän ensisijaisena tavoitteena on turvata työuran aikana ansaittujen työeläkkeiden maksaminen eläkkeelle jäämisestä aina eläkkeen päättymiseen asti. Työeläkkeiden hoitaminen on ulkoistettu eläkelaitoksille, jotka keräävät työeläkemaksut työntekijöiltä ja -antajilta, sijoittavat osan keräämistään varoista sijoitusmarkkinoille ja maksavat eläkkeitä voimassa olevien työeläkelakien mukaisesti. Suomessa on useita eri työeläkelajeja. Näistä osa koskee yksityisellä sektorilla toimivia eläkelaitoksia, kuten esimerkiksi työntekijäin eläkelaki TEL, lyhytaikaisten työsuhteiden eläkelaki LEL ja taitelijoiden eläkelaki TaEL, jotka 1.1.2007 yhdistetään Työntekijän eläkelajiksi (TyEL). Osa työeläkelajeista taas on julkisella sektorilla toimiville eläkelaitoksille, kuten esimerkiksi kuntien eläkelaki KVTEL ja valtion eläkelaki VEL. Suomen työeläkejärjestelmää on kuvattu tarkemmin Hietaniemen ja Vidlundin [18] toimittamassa kirjassa. Tässä väitöskirjassa tarkastellaan erityisesti yksityisen sektorin TyEL-järjestelmän ja TyEL-lain mukaan toimivien eläkelaitosten rahoituksen riskinhallintaa.

TyEL-järjestelmä on hajautettu ja osittain rahastoiva järjestelmä, jossa eläkkeiden hoitaminen on annettu TyEL-laissa tarkoitetuille työeläkelaitoksille. Ne keräävät työeläkevakuutusmaksut (TyEL-maksu) työntekijöiltä ja -antajilta, sijoittavat TyEL-maksun ns. rahastoitavat osat sijoitusmarkkinoille ja maksavat eläkkeitä voimassa olevien säännösten mukaisesti. Rahastointi tuo eläkejärjestelmään sijoitusriskin. Sijoitusriskin kantavat viime kädessä työntekijät ja -antajat, sillä rahastoiduille eläkkeille saatava tuotto ei säännösten mukaan juurikaan vaikuta maksettavien eläkkeiden tasoon, vaan pitkällä aikavälillä tuottojen heilahtelu katetaan työntekijöiden ja -antajien TyEL-maksujen muutoksilla.

Työeläkelaitosten rahoituksen riskinhallinnalle on tyypillistä hyvin pitkä suunnitteluhorisontti. Kerättäviin TyEL-maksuihin liittyvät eläkemaksuvelvoitteet voivat tulla maksettaviksi vasta monen vuosikymmenen jälkeen. Riskinhallinnassa olennaisia tekijöitä ovat sijoituksille saatavat tuotot sekä vakuutusliikkeen kassavirrat, joihin molempiin liittyy huomattavaa epävarmuutta. Sijoitustuotot vaikuttavat sekä eläkelaitosten varallisuuteen että rahastoista maksettavien eläkkeiden määrään. Sijoitustuottojen ja vakuutusliikkeen kassavirtojen lisäksi eläkelaitoksen riskinhallinnassa olennainen epävarmuuden lähde on aktuaarisesti laskettava vastuuvélka, jonka on määrä kuvata tulevien rahastoista maksettavien eläkkeiden nykyarvoa. Vastuuvélan ja sijoitusvarallisuuden perusteella määritellään eläkelaitoksen vakavaraisuus ja mahdollinen konkurssi. Yksittäisen työeläkelaitoksen sijoitustoiminnan riskinä on saada muita eläkelaitoksia heikompia sijoitustuottoja pitkällä aikavälillä, sillä työeläkelaitosten konkurssirajaan vaikuttava vastuuvélka ja myös

maksettavat eläkkeet määräytyvät kaikkien eläkelaitosten saamien keskimääräisten sijoitustuottojen perusteella.

Työeläkelaitoksille määrättävät säännökset ovat olennainen tekijä työeläkejärjestelmän tavoitteiden ja valvonnan kannalta. Säännökset määrittävät esimerkiksi missä määrin työeläkelaitosten sijoitustuotot vaikuttavat rahastoista maksettavien eläkkeiden määrään ja sitä kautta kuinka korkeiksi TyEL-maksut muodostuvat. Lisäksi niissä määrätään, kuinka eläkelaitokset voivat harjoittaa sijoitustoimintaa. Säännökset määräävät järjestelmän pitkän aikavälin sallitun riskitason ja pyrkivät ohjaamaan työeläkelaitosten toimintaa määritellyn riskitason ja järjestelmän muiden tavoitteiden mukaisesti. Työeläkelaitosten tehtäväksi jää mahdollisimman hyvän tuoton tavoittelu annetuilla säännöksillä.

TyEL-lain perusteella eläkelaitokset ovat yhteisvastuullisia eläkelaitoksen konkurssitapauksessa, joten konkurssien välttäminen on kaikkien työeläkelaitosten ja työeläkejärjestelmän maksajien etu. Konkurssien välttämiseksi eläkelaitoksille on asetettu lukuisia säännöksiä, joiden noudattamista seuraa Vakuutusvalvontavirasto. Säännösten pitäisi perustua julkisesti saatavilla oleviin tutkimuksiin, jotta niiden vaikutuksia TyEL-järjestelmän pitkän aikavälin tavoitteisiin voitaisiin puolueettomasti arvioida. Säännösten pitäisi kuitenkin olla mahdollisimman yksinkertaisia, jotta yksittäinen eläkelaitos voisi suunnitella oman sijoitustoimintansa mahdollisimman tuottovasti ja turvaavasti. Eläkelaitoksen kannalta kaikki ulkopuolelta asetetut rajoitukset haittaavat sen sijoitustoimintaa ja riskinhallintaa.

Väitöskirjan viisi esseetä liittyvät työeläkelaitosten ja -järjestelmän rahoituksen riskinhallintaongelman kuvaamiseen ja analysointiin. Johdannon kappaleessa 2 käsitellään lyhyesti työeläkelaitosten rahoituksen riskinhallintaan olennaisesti vaikuttavien taloudellisten epävarmuustekijöiden pitkän aikavälin mallinnusta ja aiheeseen liittyvää esseetä ”Sijoitustuottomalli työeläkelaitoksille”. Työeläkejärjestelmän haastavuuden takia riskinhallinnassa joudutaan turvautumaan numeerisiin menetelmiin, jolloin tarvitaan yksinkertaisia numeerisia laskentamalleja riskinhallinnan kannalta olennaisille tekijöille. Kappaleessa 3 käsitellään työeläkelaitoksen riskinhallintaan olennaisesti vaikuttavien kassavirtojen ja vastuiden numeerista mallintamista ja esseen ”Työeläkelaitoksen kassavirta-vastuumalli” tuloksia. Kun sijoitustuottojen ja vakuutustoiminnan kassavirtojen laskentaan soveltuva stokastinen malli on rakennettu, voidaan tutkia TyEL-järjestelmää ja erilaisten muutosten vaikutusta järjestelmän parantamiseksi. Kappaleessa 4 käsitellään Hallituksen lakiesityksen [16] vaikutusta TyEL-maksuun ja esseen ”Sijoitusuudistuksen vaikutus yksityisen sektorin työeläkevakuutusmaksuun” tuloksia. Eläkelaitoksen tehtävänä on löytää optimaalinen sijoitusstrategia annetuilla säännöksillä huomioiden sijoitustuottoihin ja vakuutusliikkeeseen liittyvä stokas-

tiikka. Eläkelaitoksen pitkän aikavälin sijoitusongelma on vaikea päätösongelma, jolle voidaan hakea optimaalista ratkaisua vain numeerisin menetelmin. Optimointimenetelmien soveltamiseen liittyy ongelmia, koska analyttisen ratkaisun ollessa tuntematon optimiratkaisun laadun arviointi on vaikeaa. Kappaleessa 5 käsitellään stokastisen optimoinnin tehtävän optimiarvon ja -ratkaisun konvergoitumista optimiin ja esseen “Numerical study of discretizations of multistage stochastic programs” tuloksia. Kun optimointimenetelmä on valittu ja sen ominaisuudet tunnetaan, täytyy vielä rakentaa optimointimalli, joka huomioi suomalaisen työeläkejärjestelmän erityispiirteet. Kappaleessa 6 käsitellään työeläkeyhtiön riskinhallintaan liittyvän päätösongelman optimointia ja esseen “A stochastic programming model for asset liability management of a Finnish pension insurance company” tuloksia.

2 Stokastisten tekijöiden mallinnus

Työeläkejärjestelmän rahoitukseen liittyy monia epävarmuustekijöitä. Näitä ovat esimerkiksi sijoituksille saatavat tuotot, eläkkeiden määrät, muutokset kuolevuudessa ja keskimääräisen eläköitymisiän kehitys. Taloudelliseen toimintaan liittyvien ja demografisten epävarmuustekijöiden oletetaan olevan keskenään riippumattomia, jolloin ne voidaan mallintaa erillisillä malleilla. Tässä tutkimuksessa ei käsitellä demografisten tekijöiden mallinnusta.

Riskinhallinnassa on kuvattava päätöksentekijän omaa näkemystä epävarmuudesta. Työeläkejärjestelmän sijoitustoiminnan pitkäjänteisyyden vuoksi epävarmuuden kuvaamiseen tarvitaan malli, joka pystyy kuvaamaan päätöksentekijän näkemyksiä pitkällä aikavälillä. Kenties tunnetuin eläkelaitoksille tehty stokastinen malli on Wilkien malli [33, 34]. Samantyyppisiä malleja suomalaisille työeläkelaitoksille ovat esittäneet ainakin Ranne [30] ja Heikkilä [17]. Wilkien mallin tyyppisten hierarkkisten (“cascaded”) mallien yksinkertaisuudesta seuraavana rajoitteena on, että ne pystyvät kuvaamaan vain yksisuuntaisia riippuvuussuhteita. Lisäksi Heikkilän mallissa on puute, että se kuvaa sellaisenaan epärealistisesti esimerkiksi korkoja ja osakeindeksejä. Ongelma on korjattu lisäämällä malliin rajoitteita negatiivisten korkojen ja osakeindeksien välttämiseksi, mutta lisärajoitteiden seurauksena saattaa olla positiivisen todennäköisyysmassan kertyminen poikkeaviin pisteisiin.

Koivu et al. [21] ovat esittäneet Englen ja Grangerin [12] VEqC (Vector Equilibrium Correction)-malliin perustuvan stokastisen mallin suomalaisen työeläkelaitoksen sijoitustuottojen epävarmuuden kuvaamiseen. VEqC-malli on vektoriautoregressiivisen mallin yleistys, jonka avulla voidaan kuvata stokastisten tekijöiden pitkän aikavälin tasapainotiloja. Vektoriautoregressiivisten mallien etu hierarkkisiin malleihin on, että niissä ei rajoiteta aikasarjojen

välistä kausaalisuutta etukäteen. Koivu et al. esittämässä mallissa positiiviset muuttujat kuvataan lähtökohtaisesti positiivisina muuttujina käyttäen asianmukaisia datamuunnoksia. Mallissa on käytetty myös asiantuntijainformaatiota parametrien arvoissa, jolloin malli saadaan vastaamaan käyttäjän omia näkemyksiä niiltä osin kuin historiadatasta estimoidut parametriarvot eivät sitä tee.

Esseessä “Sijoitustuottomalli työeläkelaitokselle” esitetään aikasarjamalli työeläkelaitoksen pitkän aikavälin sijoitustuotoille sekä vakuutusliikkeen kassavirtojen ja vastuuvelan laskennassa olennaisille ansiotaso- ja elinkustannusindekseille. Malli laajentaa Koivu et al. esittämää mallia lisäämällä siihen inflaation ja jakamalla osakesijoitukset neljään luokkaan. Mallia on yksinkertaistettu käyttämällä hintaindeksin ja käteistuoton sijasta osake- ja kiinteistöisijoitusten kokonaistuottoindeksejä. Lisäksi mallissa huomioidaan esimerkiksi Lothian et al. [23] havaitsema inflaation ja sijoitustuottojen välinen yhteys pitkällä aikavälillä. Myös korkojen malli on johdonmukaisempi. Simulointitestin perusteella simuloidut jakaumat vastaavat annettua asiantuntijainformaatiota ja historiallisista aikasarjoista estimoituja hajontoja.

3 Kassavirtojen ja vastuiden mallinnus

Rahastoinnissa ja työeläkelaitosten välisessä vastuunjaossa käytetyt lukuisat säännökset ja laskentakaavat tekevät Suomen työeläkejärjestelmästä käytännön tasolla monimutkaisen. TyEL-lain perusteella suurin osa yksityisen sektorin työeläkelaitosten keräämistä TyEL-maksuista menee melko suoraan nykyisten eläkkeiden maksamiseen ja vain TyEL-maksun rahastoitavat osat jäävät maksun keränneen työeläkelaitoksen sijoitettavaksi tulevia eläkemenoja varten. Näiden työeläkelaitoksen vastuulla olevien rahastoitujen eläkkeiden perusteella laitos on velvollinen maksamaan eläkkeitä eläkkeen alkamisesta eläkkeen päättymiseen saakka. Eläkelaitosten tulevaisuudessa maksettavien rahastoitujen eläkkeiden nykyarvoa kuvaamaan on kehitetty aktuaarisesti laskettava vastuuvélka, joka yhdessä eläkelaitoksen varallisuuden kanssa määrittelee eläkelaitosten vakavaraisuuden. Työeläkejärjestelmän vakuutusmekaniikkaa ovat kuvanneet Tuomikoski ja Kilponen [31].

Työeläkelaitoksen rahoituksen riskinhallinnassa pitää huomioida vain ne kassavirrat, jotka vaikuttavat laitoksen sijoitusomaisuuteen ja vastuuvélkaan. Esseessä “Työeläkelaitoksen kassavirta-vastuumalli” esitetään yksinkertainen numeeriseen laskentaan soveltuva malli 1.1.2007 voimaan tulevan TyEL-lain mukaisesti toimivan työeläkelaitoksen riskinhallintaan olennaisesti vaikuttavien kassavirtojen ja vastuiden laskentaan. Näitä ovat rahastoitavat vanhuus- ja työkyvyttömyyseläkemaksut, rahastoista maksettavat vanhuus- ja työky-

vyttömyyseläkkeet sekä vanhuus- ja työkyvyttömyyseläkeliikeen vastuuvelat. Muiden rahastoista maksettavien työeläkelajien odotettavissa oleva osuus kassavirroista ja vastuuvasta on niin pieni, että ne esiintyvät mallissa vakioina. Esitetyn mallin tulokset ovat konsistentteja Biström et al. [3] esittämän Eläketurvakeskuksen (ETK) deterministisen laskelman kanssa vanhuuseläkeliikeen osalta. Työkyvyttömyyseläkkeistä ei ollut saatavilla vastavia vertailutietoja. Lisäksi on esitetty simulaatiotuloksia, joissa ansiotaso- ja elinkustannusindeksi on mallinnettu stokastisina esseessä ”Sijoitustuottomalli työeläkelaitoksille” esitetyllä aikasarjamallilla. Simulointien perusteella kassavirtoihin liittyy huomattavasti epävarmuutta, joka täytyy ottaa huomioon eläkelaitoksen riskinhallinnassa.

4 Sijoitusuudistuksen vaikutus TyEL-maksuun

TyEL-lain mukaan eläkkeiden rahastoitujen osien maksaminen on työeläkelaitosten vastuulla ja loput ansaituista eläkkeistä kustannetaan työntekijöiltä ja työnantajilta perittävillä TyEL-maksuilla ns. tasausjärjestelmän kautta. Mitä suurempi osa vuosittaisesta eläkemenosta saadaan katettua rahastoista maksettavilla osilla, sitä pienemmäksi muodostuu TyEL-maksu. Työeläkejärjestelmän maksajien kannalta on tavoiteltavaa, että rahastoista maksettavat eläkkeet olisivat mahdollisimman suuret ja TyEL-maksut mahdollisimman matalat ja tasaiset. Odotettavissa oleva suurten ikäluokkien eläköityminen seuraavien parin vuosikymmenen aikana yhdessä pienenevien työikäisten sukupolvien kanssa on aiheuttanut paineita TyEL-maksujen nostamiseksi. Tämä on johtanut pohdintaan, että pitäisikö työeläkesäännöksiä muuttaa nousupaineen pienentämiseksi. Hallitus esittikin 8.6.2006 [16] muutoksia vuoden 2007 alussa voimaan tulevaan TyEL-lakiin, joiden tavoitteena on alentaa tulevia työeläkevakuutusmaksuja. Lakiesitys perustuu pitkälti eläkeneuvotteluryhmän ehdotuksiin [11].

Olennaisia muutoksia lakiesityksessä ovat eläkevarojen sijoitustuottojen kohdistaminen vanhempien ikäluokkien vanhuuseläkerahastojen täydennyksiin ja uusi osaketuottosidonnainen vastuuvastuu. Nykyisin eläkevarojen tuotot kohdistetaan vanhuuseläkkeiden rahastoituja osien täydennyksiin käyttäen ns. laskuperustekorkoa, joka riippuu työeläkelaitosten keskimääräisistä vakavaraisuusasteesta - käytännössä siis eläkevaroille saatavista sijoitustuotoista ja eläkevastuista. Täydennykset kohdistetaan tasaisesti kaikille ikäluokille. Lakiesityksen mukaan jatkossa täydennykset voitaisiin kohdistaa eri suuruksina eri ikäluokille, jolloin sijoitustuotot alentaisivat TyEL-maksua nopeammin lähitulevaisuudessa kuin nykyinen eläkkeiden täydennyssääntö. Lakiesityksen mukaan tämän pitäisi pienentää erityisesti vuosien 2020-2030 tuntumaan

osuvaa TyEL-maksun huippuvaihetta. Lakiesityksen mukainen osaketuotto-sidonnainen vastuuvélka riippuu työeläkelaitosten keskimääräisistä osaketuottoista ja voi olla joko positiivinen tai negatiivinen. Vastuuvélan pitäisi alen-taa työeläkelaitosten konkurssirajaa silloin kun eläkelaitosten osakesijoituk-set tuottavat keskimäärin tappiota. Uudistuksen tavoitteena on lisätä työ-eläkelaitosten osakesijoitusmahdollisuutta ja sen odotetaan alentavan TyEL-maksua eläkevarojen pitkän aikavélin keskimääräisen tuotto-odotuksen kas-vaessa.

Eläkeneuvotteluryhmän ja Biström et al. [3] raporteissa esitetään ETK:n deterministisiä pitkän aikavélin laskelmia TyEL-maksun kehityksestä sekä tehdään herkkyysanalyysijä sijoitustuotoille. Varsinaista sijoitustoimintaan, ansiotasoon tai inflaatioon liittyvää stokastiikkaa laskelmissa ei kuitenkaan esiinny. Heikkilä [17] ja eläkeneuvotteluryhmä ovat tutkineet osakesijoitus-ten lisäämisen vaikutusta työeläkeyhtiön ja -järjestelmän vakavaraisuuteen ottaen huomioon sijoitustuottoihin liittyvän epävarmuuden, mutta vaikutus-ta TyEL-maksuun ei suoraan tutkittu. Eläkeneuvotteluryhmän päätelmät perustuvatkin pitkälti kahden erillisen mallin, ETK:n deterministisen mal-lin ja työeläkeyhtiö Varman stokastisen sijoitusmallin tulosten analyysiin ja epäsuoraan yhdistämiseen.

Esseessä “Sijoitusuudistuksen vaikutus yksityisen sektorin työeläkevakuu-tusmaksuun” on tutkittu simuloimalla hallituksen 8.6.2006 antaman lakiesi-tyksen vaikutusta TyEL-maksuun huomioiden eläkemenoon ja sijoitustuot-toihin liittyvä epävarmuus. Esseessä on esitetty yksinkertainen numeeriseen laskentaan soveltuva malli vanhuuseläkemenon ja TyEL-maksun laskentaan. Sijoitustuottojen, ansiotaso- ja elinkustannusindeksien stokastiikka kuvataan esseessä “Sijoitustuottomalli työeläkelaitoksille” esitetyllä aikasarjamallilla, joka poikkeaa oleellisesti eläkeneuvotteluryhmän laskelmissa käytetystä Heik-kilän mallista. Laskelmat ovat alustavia, koska virallisia laskuperusteita ei ol-lut saatavilla. Lakiesityksen mukaisessa eläkejärjestelmässä maksun mediaa-ni putoaisi noin 2-2,5%:a vuoteen 2034 mennessä, mutta tuleviin maksuihin liittyy huomattavaa epävarmuutta. Maksun jakauma on huomattavan epä-symmetrinen, joten vastaavanlaisissa laskelmissa usein raportoidut tunnuslu-vut, keskiarvo ja hajonta, eivät kerro riittävästi maksun jakaumasta. Lopul-linen maksu riippuu lisäksi valittavista laskuperusteista. Laskelmat antaisi-ivat aihetta tarkastella uudestaan mm. asiakaspalautusten laskentaperiaattei-ta ja niiden parametrien arvoja sekä laskuperustekoron kaavaa. Asiakaspalautusten salliminen ns. vakavaraisuusrajal-le asti nostaa pitkällä aikavälillä sekä TyEL-maksua että konkurssiriskiä verrattuna esitettyyn vaihtoehto-i-seen malliin. Nykyisellä asiakaspalautusten säännöllä palautukset myös kas-vavat ajan myötä suhteessa palkkasummaan. Satunnaisesti voi tulla myös erittäin suuria palautusten määriä suhteessa palkkasummaan, sillä toimin-

tapääoman ollessa liian suuri suhteessa vakavaraisuusrajaan, osa ylityksistä maksetaan asiakaspalautusina takaisin työnantajille. Todennäköisyyttä voitaisiin pienentää esimerkiksi sallimalla laskuperustekorona nousta yli 0,5%:a kerrallaan.

Tulosten perusteella laskentasäännöillä on vaikutusta TyEL-maksuun pitkällä aikavälillä, joten TyEL-järjestelmän laskentasääntöjen pitäisi perustua julkisesti saatavilla oleviin, hyvin dokumentoituihin tutkimuksiin. Tällöin laskentamallien ja niiden tulosten voitaisiin arvioida puolueettomasti ja varmistaa, että laskentasäännöt ovat parhaat mahdolliset järjestelmän tavoitteiden kannalta.

5 Stokastisen optimointitehtävän diskretointi

Työeläkelaitosten varojen ja vastuiden hallinta (Asset Liability Management, ALM) on tyypillisesti monimutkainen diskreettiaikainen päätösongelma epävarmuuden vallitessa. Stokastinen optimointi on paljon käytetty menetelmä eläkelaitosten ALM-ongelmien ratkaisemiseen. Sen avulla voidaan mallintaa monimutkaisia optimointiongelmia ja epävarmuustekijät voidaan kuvata monipuolisesti esimerkiksi aikasarjamallien avulla. Stokastista optimointia on esitelty esimerkiksi lähteessä <http://hkkk.fi/systems/sp/>. Muita lähestymistapoja päätösongelmaan esitellään seuraavassa kappaleessa.

Kun optimointiongelman stokastiikka on kuvattu aikasarjamallilla, ongelmasta tulee ääretönulotteinen optimointiongelma. Sitä ei voida ratkaista analyttisesti kuin vain aivan yksinkertaisimmissa tapauksissa. Pennasen [25] mukaan ääretönulotteinen tehtävä voidaan kuitenkin ratkaista diskretoimalla alkuperäinen ongelma approksimoivaksi ongelmaksi. Approksimoiva optimointiongelma ratkaistaan numeerisesti esimerkiksi kaupallisilla optimiohjelmistoilla. Diskretoidunkin optimointiongelman ratkaisun löytäminen saattaa olla vaikeaa, sillä tehtävän koko kasvaa eksponentiaalisesti päätösperiodien ja diskretoinnissa käytettyjen otantapisteen määrän funktiona, jolloin sen ratkaiseminen edellyttää huomattavaa laskentatehoa. Esimerkiksi Gondzio ja Kouwenberg [15] ovat käyttäneet kuudentoista prosessorin rinnakkaislaskentaa ratkaistessaan hollantilaisen eläkerahaston ALM-ongelmaa stokastisella optimoinnilla. Rinnakkaislaskenta ja muu vastaava superteholaskenta edellyttää kuitenkin niin suurta tietoteknistä osaamista ja erikoistunutta laskentakapasiteettia, ettei käytännön päätöksentekijöillä ole yleensä mahdollisuutta niitä hyödyntää. Tällöin joudutaan tekemään diskretointi pienemmällä määrällä otantapisteitä, jolloin diskretointi jää usein liian karkeaksi. Diskretoinnin laatuun vaikuttaa otantapisteen määrän lisäksi olennaisesti käytetty diskretointimenetelmä. Huonosti tehty diskretointi saattaa

johtaa hyvinkin kaukana todellisesta optimimis-
tasta olevaan päätökseen, työ-
eläkelaitosten tapauksessa esimerkiksi erittäin riskialttiiseen sijoituspäätök-
seen. Diskretoidun tehtävän optimiratkaisun laatua on vaikea arvioida, koska
alkuperäisen tehtävän optimiratkaisua ei tunneta. Liian karkeasti diskretoi-
dun tehtävän ratkaisu on usein harhainen, mutta diskretoinnin tarkentuessa
harha häviää. Ratkaisun laatua eri diskretointimenetelmillä voidaan arvioida
numeerisesti laskemalla tilastolliset ylä- ja alarajat optimille.

Integrintikvadratuurit tarjoavat laskentatehokkaan deterministisen me-
netelmän ääretönulotteisten optimointitehtävän diskretoisemiseksi (katso [27,
28]). Pennanen [25, 26] on esittänyt ehdot, joilla approksimoivan ongelman
optimiratkaisu konvergoituu alkuperäisen ongelman optimiratkaisuun kun
tehtävä diskretoidaan yhä tarkemmin ja tarkemmin. Integrintikvadratu-
urien etu muihin diskretointimenetelmiin - kuten esimerkiksi Monte Carlo-
menetelmään - on, että se pystyy usein approksimoimaan jatkuvan optimoin-
titehtävän tarkemmin samalla määrällä otantapistettä. Tämä on olennainen
etu toimittaessa rajatulla laskentakapasiteetilla.

Koivu [20] ja Pennanen ja Koivu [28] ovat tutkineet numeerisesti staattis-
en stokastisen optimoinnin tehtävän diskretointia integrintikvadratuureilla
ja Monte Carlo-menetelmällä sekä varianssin vähentämistekniikoilla. Moni-
periodisen stokastisen optimoinnin tapauksessa esimerkiksi Chiralaksanakul
ja Morton [7, 8] ovat tutkineet Monte Carlo-menetelmän käyttöä alkupe-
räisen optimointiongelman diskretoinnissa ja Blomvall ja Shapiro [5] Monte
Carlo- ja Latin Hypercube-menetelmiä.

Esseessä "Numerical study of discretizations of multistage stochastic pro-
grams" on tutkittu numeerisesti moniperiodisen, ääretönulotteisen konvek-
sin stokastisen optimointitehtävän optimiratkaisun laatua ja konvergoitumis-
ta optimiin käytettäessä integrintikvadratuureja alkuperäisen optimointion-
gelman diskretoinnissa. Tihennettäessä diskretointia optimiarvon tilastolli-
set ylä- ja alarajat konvergoivat optimiratkaisuun käytetyillä testiongelmillä.
Konvergenssi on huomattavasti nopeampaa kuin Monte Carlo-menetelmällä
ja peilaus (antithetic) Monte Carlo-menetelmällä diskretoiduissa tehtävissä.
Testiongelmina käytetään rahoituksen riskinhallinnassa yleisesti sovellettavia
moniperiodisia optimointitehtäviä.

6 Optimointimalli työeläkelaitoksen varojen ja vastuiden hallintaan

Stokastinen optimointi on menetelmä monimutkaisten diskreetti aikaisten pää-
tösongelmien ratkaisemiseen epävarmuuden vallitessa. Muita menetelmiä ovat

ainakin päätössäännöt, dynaaminen optimointi ja optimiohjausteoria.

Päätössäännöt ovat suosittu lähestymistapa niiden helpon toteutettavuuden ja ymmärrettävyyden ansiosta. Yksi suosituimmista päätössäännöistä ALM-sovelluksissa on ns. kiinteän sijoitusallokaation strategia, jossa sijoitusallokaatiot päivitetään aina annetuin väliajoin vastaamaan etukäteen päätettyjä kiinteitä sijoitusosuuksia sijoitusportfolion arvosta. Päätössääntö voi olla myös tilariippuvainen, sijoitusosuudet voivat riippua esimerkiksi eläkelaitoksen vakavaraisuusasteesta; katso [4, 29]. Suomessa päätössääntöjä työeläkeyhtiöiden riskinhallinnan tutkimuksessa on soveltanut ainakin Heikkilä [17]. Päätössääntöjen tulokset eivät yleensä ole optimaalisia, sillä ne rajoittavat mahdollisten sijoitusstrategioiden joukkoa merkittävästi. Lisäksi päätössääntöjen parametrien optimointi saattaa olla hankalaa [13]. Dynaamisessa optimoinnissa tyypillinen lähestymistapa on ratkaista ongelma rekursiivisesti jokaisessa tilassa jokaisella päätöshetkellä, eikä siinä voida käyttää kovinkaan monimutkaisia rajoitteita (katso esim. [1]). Lisäksi päätösongelmaan liittyvän stokastiikan on yleensä noudatettava Markov-prosessia eli stokastisen prosessin tuleva kehitys riippuu vain prosessin nykyisestä tilasta, ei siitä miten siihen on tultu. ALM-ongelmissa on kuitenkin tyypillisesti monimutkaisia rajoitteita ja epävarmuutta kuvataan usein aikasarjamalleilla. Stokastisessa optimiohjauksessa tavoitteena on löytää tilariippuvainen päätössääntö (katso esim. [2]). Myös stokastisessa optimiohjauksessa stokastiikka on kuvattava Markov-prosessina eikä riittävän monimutkaisia rajoitteita voida ottaa huomioon ALM-sovellusten ratkaisemiseksi.

Stokastisen optimoinnin avulla voidaan mallintaa huomattavasti monimutkaisempia optimointiongelmia kuin dynaamisella optimoinnilla ja optimiohjauksella, koska se ei edellytä tiettyä muotoa tavoitefunktiolta, se sallii monenlaiset rajoitteet ongelmassa ja stokastiikkaa voidaan kuvata monipuolisesti esimerkiksi aikasarjamallien avulla. Stokastisen optimoinnin ongelmia ovat suuri laskentatehon tarve ja ääretönulotteisten tehtävien tapauksessa tehtävän diskretointi ja diskretoidun tehtävän optimiratkaisun laadun arvioinnin vaikeus.

Tietokoneiden laskentatehon ja matemaattisten ohjelmistojen kehittyessä on raportoitu yhä useampia stokastisen optimoinnin ALM-sovelluksia (katso esim. [35]). Erityisesti eläkelaitoksille kehitettyjä stokastisen optimoinnin ALM-sovelluksia ovat raportoineet ainakin Høyland [19], Consigli ja Dempster [9], Mulvey et al. [24], Bogentoft et al. [6], Kouwenberg [22], Geyer et al. [14], van der Vlerk et al. [32] ja Dupačová ja Polívka [10]. Näissä sovelluksissa on puutteita stokastiikan kuvauksessa ja/tai optimointiongelman diskretoinnissa. Høyland kuvaa stokastiikan jatkuvien jakaumien sijaan diskreetillä skenaarioilla ja jakauman muutamalla ensimmäisellä momentilla. Tällöin optimointitehtävä ei ole riittävän hyvin määritelty, jotta esimerkiksi optimi-

ratkaisun laatua voitaisiin edes arvioida. Muissa sovelluksissa stokastiikka on kuvattu jatkuvilla jakaumilla, mutta diskreetointimenetelmän teoreettisia ominaisuuksia ei ole tutkittu riittävästi.

Esseessä "A stochastic programming model for asset liability management of a Finnish pension insurance company" esitetään stokastisen optimoinnin malli suomalaiselle työeläkeyhtiölle. Malli poikkeaa aikaisemmista ALM-sovelluksista siinä, että optimointiongelman diskreetoinnissa on sovellettu integrointikvadratuuria. Integrointikvadratuurin käyttö ongelman diskreetoinnissa parantaa selkeästi realistisen kokoisten tehtävien ratkaisun laatua verrattuna esimerkiksi Monte Carlo-menetelmään ja mahdollistaa riittävän lähellä optimia olevien ratkaisujen löytämisen mikrotietokoneella. Mallissa on lisäksi huomioitu suomalaisen työeläkejärjestelmän erityispiirteet, kuten esimerkiksi vakavaraisuussäännökset sekä vakuutusliikkeen kassavirtojen ja vastuiden laskentasäännöt. Esseessä on verrattu stokastisen optimoinnin avulla saavutettavia tuloksia kiinteään sijoitusallokaation strategiaan sekä tätä parempia tuloksia tuottaneeseen dynaamiseen päätösstrategiaan. Päätösstrategioita kokeiltiin noin tuhat vaihdellen parametriarvoja. Optimointimalli toimi numeerisessa testissä hyvin - stokastisella optimoinnilla saavutettiin huomattavasti parempaa tuottoa varoille suhteessa konkurssiriskiin kuin yhdelläkään päätösstrategioista.

Viitteet

- [1] D.P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control*. Athena Scientific, kolmas painos, 2005.
- [2] D.P. Bertsekas ja S.E. Shreve. *Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case*. Academic Press, New York, 1978.
- [3] P. Biström, T. Klaavo, I. Risku ja H. Sihvonen. Eläkemenot, maksut ja rahastot vuoteen 2075. Eläketurvakeskuksen raportteja, Eläketurvakeskus, 2004.
- [4] F. Black ja R. Jones. Simplifying portfolio insurance for corporate pension plans. *Journal of Portfolio Management*, 14, 33–37, 1988.
- [5] J. Blomvall ja A. Shapiro. Solving Multistage Asset Investment Problems by Monte Carlo Based Optimization. *Mathematical Programming, Series B*, 2005. To appear.
- [6] E. Bogentoft, E. Romeijn ja S. Uryasev. Asset/liability management

- for pension funds using CVaR constraints. *Journal of Risk Finance*, 3, no. 1, 57–71, 2001.
- [7] A. Chiralaksanakul. *Monte Carlo methods for multi-stage stochastic programs*. väitöskirja, University of Texas at Austin, Austin, Texas, 2003.
 - [8] A. Chiralaksanakul ja D. Morton. Assessing policy quality in multi-stage stochastic programming. *Stochastic Programming E-Print Series*, 2004, no. 12, 2004.
 - [9] G. Consigli ja M.A.H. Dempster. Dynamic stochastic programming for asset-liability management. *Annals of Operations Research*, 81, 131–161, 1998.
 - [10] J. Dupačová ja J. Polívka. Asset-liability management for Czech pension funds using stochastic programming. *Stochastic Programming E-print Series*, 2004, no. 1, 2004.
 - [11] Eläkeneuvotteluryhmä. Työeläkejärjestelmän sijoitustoimintaa koskeva selvitys. Tekninen raportti, 2006.
 - [12] R.F. Engle ja C.W.J. Granger. Co-integration and error correction: representation, estimation and testing. *Econometrica*, 55, no. 2, 251–276, 1987.
 - [13] S.E. Fleten, K. Høyland ja S.W. Wallace. The performance of stochastic dynamic and fixed mix portfolio models. *European Journal of Operations Research*, 140, 37–49, 2002.
 - [14] A. Geyer, K. Herold, K. Kontriner ja W.T. Ziemba. The Innovest Austrian pension fund financial planning model InnoALM. Working paper, University of British Columbia, 2002.
 - [15] J. Gondzio ja R. Kouwenberg. High performance computing for asset liability management. *Operations Research*, 49, no. 6, 879–891, 2001.
 - [16] HE77/2006. Hallituksen esitys Eduskunnalle eläkelaitosten toimintapääomaa ja vastuuvalkaa koskevien säännösten muuttamiseksi. 2006.
 - [17] M. Heikkilä. Tel-järjestelmän yhteinen tuottovelvoite ja yksittäisen yhtiön sijoitustuottojen jäännösvarianssi. Working paper, Suomen Aktuaariyhdistys, 2004.

- [18] M. Hietaniemi ja M. Vidlund, toimittajat. *Eläkkeiden rahoitus*. Eläketurvakeskus, 2003.
- [19] K. Høyland. *Asset liability management for a life insurance company: A stochastic programming approach*. väitöskirja, Norwegian University of Science and Technology, 1998.
- [20] M. Koivu. Variance reduction in sample approximations of stochastic programs. *Mathematical Programming, Series A*, 103, no. 3, 463–483, 2005.
- [21] M. Koivu, T. Pennanen ja A. Ranne. Modeling assets and liabilities of a Finnish pension company: a VEqC approach. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005, no. 1, 46–76, 2005.
- [22] R. Kouwenberg. Scenario generation and stochastic programming models for asset liability management. *European Journal of Operations Research*, 134, no. 2, 279–292, 2001.
- [23] J.R. Lothian ja C. McCarthy. Equity returns and inflation: the puzzlingly long lags. *Research in Banking and Finance*, 2, 149–166, 2001.
- [24] J.M. Mulvey, G. Gould ja C. Morgan. An asset and liability management system for Towers Perrin-Tillinghast. *Interfaces*, 30, no. 1, 96–114, 2000.
- [25] T. Pennanen. Epi-convergent discretizations of multistage stochastic programs. *Mathematics of Operations Research*, 30, 245–256, 2005a.
- [26] T. Pennanen. Epi-convergent discretizations of multistage stochastic programs via integration quadratures. *Mathematical Programming*, 2005b. To appear.
- [27] T. Pennanen ja M. Koivu. Integration quadratures in discretization of stochastic programs. *Stochastic Programming E-print Series*, 2002, no. 11, 2002.
- [28] T. Pennanen ja M. Koivu. Epi-convergent discretizations of stochastic programs via integration quadratures. *Numerische Mathematik*, 100, 141–163, 2005.
- [29] A.F. Perold ja W.F. Sharpe. Dynamic strategies for asset allocation. *Financial Analyst Journal*, 4, 16–27, 1988.
- [30] A. Ranne. The Finnish stochastic investment model. Teoksessa *Transactions of the 26th ICA*, sivut 213–238. 1998.

- [31] J. Tuomikoski ja S. Kilponen. Lakisääteisen työeläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa. Eläketurvakeskuksen raportteja 2003:31, Eläketurvakeskus, 2003.
- [32] M.H. van der Vlerk, W.K. Haneveld ja M.H. Streutker. Integrated chance constraints in an ALM model for pension funds. *Stochastic Programming E-print Series*, 2003, no. 13, 2003.
- [33] A.D. Wilkie. A stochastic investment model for actuarial use. *Transactions of the Faculty of Actuaries*, 39, 341–403, 1986.
- [34] A.D. Wilkie. More on a stochastic asset model for actuarial use. *British Actuarial Journal*, 1, 777–964, 1995.
- [35] W.T. Ziemba ja J.M. Mulvey, toimittajat. *Worldwide Asset and Liability Management*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

Sijoitustuottomalli työeläkelaitoksille

Petri Hilli[†], Matti Koivu^{*} ja Teemu Pennanen[†]

[†] Liiketoiminnan teknologian laitos
Helsingin kauppakorkeakoulu

^{*} Risk Management Division
Euroopan keskuspankki

11. joulukuuta 2006

Tiivistelmä

Tässä raportissa on esitetty aikasarjamalli suomalaisen työeläkelaitoksen sijoitustuotoille sekä vakuutustoiminnan kassavirtojen ja vastuiden laskennassa olennaisille ansiotas- ja elinkustannusindekseille. Malli laajentaa Koivun, Pennasen ja Ranteen aiemmin esittämää mallia lisäämällä siihen inflaation ja jakamalla osakesijoitukset useampaan luokkaan. Malli on lisäksi rakennettu siten, että se huomioi inflaation ja sijoitustuottojen välillä usein havaitun yhteyden ja takaa korkojen välisen johdonmukaisuuden.

1 Johdanto

Suomen työeläkejärjestelmässä varaudutaan tuleviin eläkemenoihin sijoittamalla osa kerättävistä työeläkemaksuista sijoitusmarkkinoille ja maksamalla osa eläkemenosta sijoituspääomasta. Järjestelmässä eläkevarojen sijoittaminen ja eläkkeiden maksaminen on annettu työeläkelaitosten hoidettavaksi. Työeläkelaitosten sijoitustoiminta on hyvin pitkäjänteistä, sillä kerättäviin työeläkemaksuihin liittyvät maksuvelvoitteet voivat alkaa vasta usean vuosikymmenen kuluttua. Työeläkelaitosten strategisen rahoituksen riskinhallinnan kannalta on olennaista, että tuleviin sijoitustuottoihin ja vakuutusliikkeen kassavirtoihin sekä vastuisiin liittyvää epävarmuutta pystytään kuvaamaan pitkällä aikavälillä. Tässä raportissa kuvataan stokastinen sijoitustuot-

tomalli yhdeksälle työeläkelaitoksen strategiseen riskinhallintaan olennaisesti vaikuttavalle epävarmuustekijälle.

Stokastisia malleja vakuutuslaitosten sijoitusten ja/tai vakuutustoimintaan liittyvien tekijöiden kuvaamiseen on esitetty kirjallisuudessa paljon. Tunnetuin lienee Wilkien malli [20, 21], joka on ollut esikuvana monille myöhemmin esitetyille malleille; katso esimerkiksi Yakoubov et al. [23] tai Mulvey [17, 18], jossa esitetty malli on ollut käytössä alan johtavalla konsultointiyhtiöllä Towers Perrin Tillinghastilla. Ranne [19] ja Heikkilä [12] ovat esittäneet malleja suomalaisille eläkevakuutuslaitoksille. Muita viimeaikaisia malleja ovat esittäneet Hibbert et al. [13] ja Ahlgrim et al. [1, 2]. Edellä mainittujen mallien ongelmana on hierarkkinen (niin sanottu “cascade”) rakenne, missä aikasarjojen välisiä riippuvuuksia kuvataan yksisuuntaisesti. Tämä sulkee pois esimerkiksi poikkeavien osaketuottojen mahdollisen vaikutuksen inflaatioon tai korkoihin. Lisäksi osa yllämainituista malleista on rakennettu siten, että korot ja hintaindeksit voivat saada negatiivisia arvoja positiivisella todennäköisyydellä. Näitä epärealistisia piirteitä on yritetty korjata esimerkiksi lisäämällä simulointivaiheessa keinotekoisia rajoitteita ongelmallisille muuttujille. Tästä seuraa kuitenkin uusia ongelmia, kuten esimerkiksi positiivisen todennäköisyysmassan kerääntyminen tiettyihin poikkeaviin pisteisiin.

Tässä raportissa on esitetty Englen ja Grangerin [10] VEqC (Vector Equilibrium Correction)-malliin (tunnetaan myös nimellä yhteisintegroituvuusmalli tai vektorivirheenkorjausmalli) perustuva stokastinen malli suomalaisen työeläkelaitoksen sijoitustuotoille sekä ansiotaso- ja elinkustannusindekseille, joita voidaan käyttää työeläkelaitosten kassavirtojen ja vastuiden kehitystä kuvaavissa malleissa. VEqC-malli on vektoriautoregressiivisen mallin yleistys, jonka avulla voidaan kuvata stokastisten muuttujien pitkän aikavälin tasapainotiloja. Vektoriautoregressiivisten mallien etu Wilkien mallin tyyppiin hierarkisiin malleihin nähden on, että niissä ei rajoiteta eri aikasarjojen välistä kausaalisuutta etukäteen. Vektoriautoregressiivisiä sijoitustuottomalleja ovat esittäneet esimerkiksi Dert [7], Wright [22], Harris [11] ja Campbell et al. [5, 6]. VEqC-malliin perustuvia sijoitustuottomalleja ovat esittäneet esimerkiksi Boender et al. [3] ja Koivu et al. [15].

Koivu et al. esittämässä mallissa positiiviset muuttujat kuten korot ja hintaindeksit esitetään lähtökohtaisesti positiivisina satunnaismuuttujina. Mallin käyttäjä voi myös lisätä malliin “asiantuntijainformaatiota” kuten näkemyksiä tulevista keskimääräisistä sijoitustuotoista tai korkotasoista. Tässä raportissa esitetty malli perustuu Koivu et al. malliin, mutta siihen on lisätty inflaatio ja osakesijoitukset on jaettu neljään eri sijoitusluokkaan. Toisaalta mallia on yksinkertaistettu mallintamalla osake- ja kiinteistösijoitusten kokonaistuottoindeksejä hintaindeksin ja käteistuoton sijaan. Lisäksi hintain-

deksit ja korot on mallinnettu reaalisina, minkä avulla voidaan kuvata usein todettua yhteyttä inflaation ja sijoitusmarkkinoiden välillä; katso esimerkiksi Lothian et al. [16] ja sen viitteet. Korkosijoituksia on mallinnettu markkina-korkojen sijaan forward-korkojen avulla mikä takaa eri korkoihin liittyvien diskonttotehtävien pienemisen maturiteetin suhteen. Kaikki aikasarjat on mallinnettu kuukausitasolla.

Kappaleessa 2 on kuvattu käytetty aikasarja-aineisto ja sille tehdyt data-muunnokset, kappaleessa 3 aikasarjamalli ja kappaleessa 4 simulointituloksia.

2 Sijoitustuotot ja aikasarja-aineisto

Tavoitteena on mallintaa *kokonaistuotot* seuraaville sijoitusluokille

1. lyhyt korko,
2. pitkä korko,
3. suomalaiset osakkeet,
4. eurooppalaiset osakkeet,
5. pohjoisamerikkalaiset osakkeet,
6. aasialaiset osakkeet,
7. kiinteistöt.

Kokonaistuotto koostuu sijoituksen arvonmuutoksesta sekä käteistuotosta. Lyhyen koron tuotto R^1 määräytyy lyhyen koron F^1 mukaan seuraavasti

$$R_t^1 = e^{\Delta t F_{t-1}^1},$$

missä Δt on aika-askeleen pituus vuosina. Lyhyt korko F^1 mallinnetaan positiivisena stokastisena prosessina, mikä takaa että $R^1 > 0$. Pitkän koron tuottoa R^2 approksimoidaan kaavalla

$$R_t^2 = \Delta t Y_{t-1} + \left(\frac{1 + Y_t}{1 + Y_{t-1}} \right)^{-D},$$

missä Y on pitkä korko; katso liite A. Osakesijoitusten tuotot R^j määräytyvät kokonaistuottoindeksien S^j perusteella

$$R_t^j = \frac{S_t^j}{S_{t-1}^j} \quad j = 3, \dots, 6.$$

Kiinteistösijoitusten kokonaistuotto R^7 muodostuu arvonmuutoksesta ja vuokratuotosta

$$R_t^7 = \Delta tr_t + \frac{S_t^7}{S_{t-1}^7}.$$

Tässä S^7 on kiinteistöhintaindeksi ja r on prosentuaalinen vuotuinen vuokratuotto.

Kokonaistuottojen lisäksi kehitetty malli sisältää kuvauksen yleisen ansiotasoindeksin W ja elinkustannusindeksin I kehityksestä. Näitä voidaan käyttää työeläkelaitosten kassavirtojen ja vastuiden kehitystä kuvaavissa malleissa; katso Hilli ja Pennanen [14]. Elinkustannusindeksi on hyödyllinen myös itse kokonaistuottojen kuvaamisessa sillä, kuten aiemmin todettiin, sen on havaittu olevan yhteydessä esimerkiksi osaketuottoihin pitkällä aikavälillä.

Estimoinnissa käytetty aikasarja-aineisto koostuu seuraavien aikasarjojen kuukausihavainnoista tammikuusta 1996 joulukuuhun 2005:

F^1 Saksan kolmen kuukauden korko 1996-1998 ja kolmen kuukauden euribor-korko 1999-2005, Saksan korkosarja on saatu Datastreamista (<http://www.datastream.com>) ja kolmen kuukauden euribor-koron aikasarja on saatu lähteestä <http://www.euribor.org>,

Y Saksan viiden vuoden korko, aikasarja on saatu Datastreamista,

S^3 OMX HELSINKI CAP-kokonaistuottoindeksi, aikasarja on saatu Datastreamista,

S^4 DJ EURO STOXX 50-kokonaistuottoindeksi, aikasarja on saatu lähteestä <http://www.stoxx.com>,

S^5 DJ Americas 600-kokonaistuottoindeksi, aikasarja on saatu lähteestä <http://www.stoxx.com>,

S^6 DJ Asia/Pacific 600-kokonaistuottoindeksi, aikasarja on saatu lähteestä <http://www.stoxx.com>,

S^7 1996-1997 interpoloitu Englannin kiinteistöhintaindeksi ja 1998-2005 interpoloitu Kiinteistöalan instituutin (KTI) kiinteistöindeksi, Englannin kiinteistöhintaindeksi on saatu lähteestä <http://www.ipdindex.co.uk/> ja KTI:n indeksi lähteestä <http://www.kti.fi>, vuositasen aikasarjat on interpoloitu kuukausihavainnoiksi,

r KTI:n vuokratuottojen vuosihavainnot 1998-2005, aikasarja saatu lähteestä <http://www.kti.fi>,

W kausitasoitettu ja interpoloitu Suomen ansiotasoindeksi, neljännesvuosihavaintojen aikasarja saatu Tilastokeskukselta ja interpoloitu kuukausihavainnoiksi,

I kausitasoitettu Euroalueen elinkustannusindeksi, aikasarja saatu lähteestä <http://epp.eurostat.cec.eu.int>.

Nämä aikasarjat on esitetty liitteen D kuvissa kuitenkin siten, että ansiotaso- ja elinkustannusindekseistä on esitetty muutokset. Koska kiinteistösjoitusten vuokratuotto r on ollut lähes vakio, se päätettiin yksinkertaisuuden mallintaa vakiona $r_t = 6,9\%$ kaikilla t . Muut 9 tekijää mallinnetaan alla kuvattujen muunnosten kautta moniulotteisella aikasarjamallilla.

Kuten lyhyt korko F^1 , myös niin sanottu *forward-korko*

$$F^2 = \frac{t_2 Y - t_1 F^1}{t_2 - t_1}$$

on aina positiivinen, mikä vastaa sitä, että diskonttokerroin pienenee maturiteetin kasvaessa, katso esimerkiksi Cairns [4, s. 5]. Jos lyhyen koron F^1 ja forward-koron F^2 arvot tunnetaan, saadaan pitkän koron Y arvo laskettua kaavasta

$$Y_t = \frac{t_1 F^1 + (t_2 - t_1) F^2}{t_2}.$$

Prosessien $F^1, F^2, S^3, S^4, S^5, S^6, S^7, W$ ja I positiivisuus taataan mallintamalla niiden logaritmeja $f^1, f^2, s^3, s^4, s^5, s^6, s^7, w$ ja i reaaliarvoisina prosesseina. Näin saadut sarjat muutetaan vielä reaalisiksi vähentämällä forward-korkojen logaritmeista kuukausi-inflaatio, eli elinkustannusindeksin logaritmin ensimmäinen differenssi $\Delta i_t = i_t - i_{t-1}$ kerrottuna käyttäjän antamalla parametrilla p ja osakeindeksien ja ansiotasoindeksin logaritmeista elinkustannusindeksin logaritmi. Näin saadut log-reaaliset sarjat

$$\begin{aligned}\tilde{f}_t^1 &= f_t^1 - p\Delta i_t \\ \tilde{f}_t^2 &= f_t^2 - p\Delta i_t \\ \tilde{s}_t^3 &= s_t^3 - i_t \\ \tilde{s}_t^4 &= s_t^4 - i_t \\ \tilde{s}_t^5 &= s_t^5 - i_t \\ \tilde{s}_t^6 &= s_t^6 - i_t \\ \tilde{s}_t^7 &= s_t^7 - i_t \\ \tilde{w}_t &= w_t - i_t\end{aligned}$$

on esitetty liitteessä D. Aikasarjojen “realisoinnilla” pyritään mallintamaan monissa tutkimuksissa havaittu yhteys inflaation sekä korkojen ja osaketuottojen välillä pitkällä aikavälillä; katso esimerkiksi [16] ja sen viitteet. Parametrin p sopivalla valinnalla voidaan parantaa log-reaalisten aikasarjojen tilastollista sopivuutta estimoitavaan aikasarjamalliin. Tässä työssä päädyttiin arvoon $p = 2, 4$.

Taulukossa 1 on esitetty DF-GLS yksikköjuuritestien tulokset kappaleessa 2 johdetuille aikasarjoille. Käytetty DF-GLS testi [9] on modifikaatio yleisesti käytetystä ADF yksikköjuuritestistä [8], jolla testin tilastollista voimaa ja ominaisuuksia pienissä otoksissa on saatu parannettua. Viivetermien lukumäärä suoritetuissa testeissä on valittu Schwarz-informaatiokriteeriä käyttäen. Deterministiset termit testeissä (vakio, trendi) on valittu puhtaasti aikasarjojen historiallisen käyttäytymisen ja intuition perusteella. Testitulosten perusteella log-reaaliset aikasarjat ovat $I(1)$ prosesseja, mutta niiden ensimmäiset differenssit ovat stationaarisia muiden paitsi kiinteistöhintaindeksin tapauksessa. Kiinteistöhintaindeksin differenssin tilastollinen epästationaarisuus saattaa johtua käytetyn datan puutteellisuudesta. Kiinteistösijoitusten kuukausittaisen arvonvaihtelun oletetaan kuitenkin olevan pitkällä aikavälillä stationaarinen, joten kappaleessa 3 rakennettavassa aikasarjamallissa kiinteistöhintaindeksin differenssi mallinnetaan stationaarisena aikasarjana.

3 Aikasarjamalli

Epästationaarisia aikasarjoja, joiden ensimmäiset differenssit ovat stationaarisia, kuvataan usein ARIMA-tyyppisillä malleilla. Tässä työssä on päädytty Vector Equilibrium Correction-malliin, joka yleistää ARIMA-malleja lisäämällä niihin niin sanotun Equilibrium Correction-termin; katso Engle ja Granger [10]. Tarkemmin, oletetaan että 9-ulotteinen prosessi

$$x = \begin{bmatrix} \tilde{f}^1 \\ \tilde{f}^2 \\ \tilde{s}^3 \\ \tilde{s}^4 \\ \tilde{s}^5 \\ \tilde{s}^6 \\ \tilde{s}^7 \\ \tilde{w} \\ i \end{bmatrix}$$

toteuttaa

$$\Delta_{\delta} x_t = A \Delta_{\delta} x_{t-1} + \alpha(\beta^T x_{t-1} - \gamma) + \varepsilon_t,$$

Taulukko 1: Yksikköjuuritestien tulokset.

Aika-sarja	Deterministiset termit	Viivetermien lukumäärä	DF-GLS testin t-arvo
$\tilde{f}^1$	vakio	0	-0,886
$\tilde{f}^2$	vakio	0	-0,708
$\tilde{s}^3$	vakio, trendi	0	-1,206
$\tilde{s}^4$	vakio, trendi	0	-0,839
$\tilde{s}^5$	vakio, trendi	0	-0,883
$\tilde{s}^6$	vakio, trendi	1	-1,606
$\tilde{s}^7$	vakio, trendi	1	-2,352
$\tilde{w}$	vakio, trendi	1	-2,245
$\tilde{i}$	vakio, trendi	1	-1,642
$\Delta \tilde{f}^1$	vakio	0	-9,282***
$\Delta \tilde{f}^2$	vakio	2	-3,238***
$\Delta \tilde{s}^3$	vakio	0	-7,979***
$\Delta \tilde{s}^4$	vakio	0	-9,579***
$\Delta \tilde{s}^5$	vakio	0	-9,702***
$\Delta \tilde{s}^6$	vakio	0	-8,099***
$\Delta \tilde{s}^7$	vakio	0	-1,115
$\Delta \tilde{w}$	vakio	0	-3,130***
$\Delta \tilde{i}$	vakio	0	-1,778*

***, **, * ilmaisee yksikköjuurinnostuksen kumoamista 1%, 5%, 10% luottamustasolla.

missä

$$\Delta_\delta x_t := x_t - x_{t-1} - \delta$$

ja ε_t on normaali-jakautunut 9-ulotteinen vektori, jonka odotusarvo on nol-lavektori. Vektorin ε_t varianssimatriisi $\Omega \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ sekä matriisit $A \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$, $\beta \in \mathbb{R}^{9 \times 2}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}^{9 \times 2}$ sekä vektorit $\gamma \in \mathbb{R}^2$ ja $\delta \in \mathbb{R}^9$ ovat mallin parametre-ja.

Jos matriisiin

$$\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \beta^T A & \beta^T \alpha + I \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ovat yksikköympyrän sisällä ja jos $\beta^T \delta = 0$, niin tällöin vekto-rien $\Delta_\delta x_t$ ja $\beta^T x_t - \gamma$ odotusarvot konvergoivat nollaan; katso liite B. Toisin sanoen, pitkällä aikavälillä

$$E \Delta x_t = \delta \quad \text{ja} \quad E \beta^T x_t = \gamma.$$

Vektorien δ ja γ sekä matriisiin β arvot kiinnitetään ennen muiden parametrien A , α ja Ω estimointia.

Kirjoittamalla Δx_t muotoon

$$\Delta x_t = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{f}_t^1 \\ \Delta \tilde{f}_t^2 \\ \Delta \tilde{s}_t^3 \\ \Delta \tilde{s}_t^4 \\ \Delta \tilde{s}_t^5 \\ \Delta \tilde{s}_t^6 \\ \Delta \tilde{s}_t^7 \\ \Delta \tilde{w}_t \\ \Delta i_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{f}_t^1 \\ \Delta \tilde{f}_t^2 \\ \Delta s_t^3 - \Delta i_t \\ \Delta s_t^4 - \Delta i_t \\ \Delta s_t^5 - \Delta i_t \\ \Delta s_t^6 - \Delta i_t \\ \Delta s_t^7 - \Delta i_t \\ \Delta w_t - \Delta i_t \\ \Delta i_t, \end{bmatrix}$$

nähdään, että vektorin δ kaksi ensimmäistä komponenttia määräävät logaritmisten reaalikorkojen keskimääräiset muutosnopeudet, neljä seuraavaa komponenttia osakkeiden keskimääräiset reaalituotot, kahdeksas komponentti reaalisen ansiotason keskimääräisen nousun ja viimeinen komponentti keskimääräisen inflaation. Koska ei ole syytä olettaa, että logaritmisten reaalikorkojen muutosnopeus poikkeaisi pitkällä aikavälillä nolasta, asetetaan vektorin δ kahden ensimmäisen komponentin arvoksi nolla. Vektorin δ loput arvot asetetaan käyttäjän näkemysten mukaisesti.

Tässä työssä on valittu

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0060 \\ 0,0052 \\ 0,0052 \\ 0,0060 \\ 0 \\ 0,0014 \\ 0,0015 \end{pmatrix}.$$

Viimeinen komponentti antaa kuukausi-inflaation mikä vastaa 1,8%:n vuosin inflaatiota. Toiseksi viimeinen komponentti antaa reaalisen ansiotason kasvun kuukausitasolla, mikä vastaa 1,7%:n vuotuista reaalista ansiotason kasvua. Osaketuottojen keskimääräiset driftit vastaavat 9%:n nominaalista log-tuottoa Suomen ja Aasian markkinoilla ja 8%:n nominaalista log-tuottoa Euroopassa ja Pohjois-Amerikassa. Kiinteistösijoitusten hintaindeksin reaalinen kasvu on oletettu nolaksi.

Matriisiin β arvoksi valitaan

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mikä vastaa logaritmistien reaalikorkojen keskiarvohakuisuutta. Vektori γ määrää tällöin logaritmistien reaalikorkojen pitkän aikavälin keskiarvot. Tässä työssä on valittu

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0,8187 \\ 1,1585 \end{pmatrix},$$

mikä vastaa noin 3,25%:n ja 4,5%:n nominaalikorkoja pitkällä aikavälillä.

Aikasarjamallin loput parametrit A , α ja Ω estimoitiin aikasarjojen historiallisista arvoista; katso liite C. Matriisien A ja α alkioista suurin osa pakotettiin nolliksi, millä haluttiin välttää pelkän historiadatan perusteella ennustamista ja vastaavasti kasvattaa satunnaistermien hajontaa.

4 Esimerkkisimulaatioita

Liitteessä D olevissa kuvissa 18 - 24 on esitetty yksittäinen mallin tuottama esimerkkisimulaatio. Realisaation käyttäytyminen vastaa silmämääräisesti varsin hyvin aikasarjojen historiallista käyttäytymistä. Lyhyt ja pitkä korko, inflaatio sekä ansiotasoindeksin muutokset samoin kuin osakeindeksit liikkuvat samansuuntaisesti keskenään. Simulontimallin keskimääräistä käyttäytymistä tutkittiin simuloimalla 10 000 kymmenen vuoden realisaatiota lähtien vuoden 2005 lopun tilanteesta. Taulukossa 2 on esitetty historiallisten ja simuloitujen log-tuottojen ja log-differenssien keskiarvot ja hajonnat. Osakkeiden simuloitujen log-tuottojen keskiarvot sekä ansiotaso- ja elinkustannusindeksien log-differenssit vastaavat hyvin kappaleessa 3 annettun drift-vektorin δ arvoja. Lähtötilanteen korkotason poikkeaminen alaspäin tasapainoarvoista aiheuttaa matalia korkotuottoja simulointiperiodin alussa. Simulaatiosta lasketut hajonnat vastaavat melko tarkkaan historiallisia hajontoja.

Taulukko 2: Kokonaistuottojen logaritmien ja ansiotaso- ja elinkustannusindeksin log-differenssien tunnuslukuja.

	Data		Simulaatiot	
	Keskiarvo	Hajonta	Keskiarvo	Hajonta
$\ln R^1$	0,032	0,002	0,031	0,003
$\ln R^2$	0,055	0,033	0,041	0,038
$\ln R^3$	0,098	0,227	0,090	0,224
$\ln R^4$	0,097	0,183	0,080	0,181
$\ln R^5$	0,088	0,196	0,080	0,194
$\ln R^6$	0,026	0,208	0,092	0,207
$\ln R^7$	0,086	0,008	0,082	0,006
$\Delta \ln W$	0,035	0,002	0,035	0,002
$\Delta \ln I$	0,018	0,001	0,018	0,001

Kiitokset Petri Hilli ja Teemu Pennanen kiittävät Sosiaali- ja terveysministeriötä tutkimuksen rahoittamisesta. Teemu Pennanen kiittää Suomen Akatemiaa tutkimustyönsä rahoittamisesta (sop. nro 3385).

Viitteet

- [1] Kevin C. Ahlgrim, Stephen P. D'Arcy ja Richard W. Gorvett. Report on Modeling of Economic Series Coordinated with Interest Rate Scenarios. Tekninen raportti, Casual Actuarial Society, 2004.
- [2] Kevin C. Ahlgrim, Stephen P. D'Arcy ja Richard W. Gorvett. A Comparison of Actuarial Financial Scenario Generators. Teoksessa *Proceedings of the American Risk and Insurance Association annual meeting*. 2006.
- [3] C. G. E. Boender, P.C. van Aalst ja F. Heemskerk. Modelling and management of assets and liabilities of pension plans in the Netherlands. Teoksessa William T. Ziemba ja John M. Mulvey, toimittajat, *Worldwide asset and liability management*, sivut 561–580. Cambridge University Press, 1998.
- [4] A. J. G. Cairns. *Interest rate models: An introduction*. Princeton University Press, 2004.
- [5] John Y. Campbell, Yeung Lewis Chan ja Luis M. Viceira. A multivariate model of strategic asset allocation. *Journal of Financial Economics*, 67, no. 1, 41–80, 2003.
- [6] John Y. Campbell ja Luis M. Viceira. Strategic Asset Allocation in a Continuous-Time VAR Model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, no. 11, 2195–2214, 2004.
- [7] C. L. Dert. A dynamic model for asset liability management for defined benefit pension funds. Teoksessa William T. Ziemba ja John M. Mulvey, toimittajat, *Worldwide asset and liability management*, sivut 501–536. Cambridge University Press, 1998.
- [8] D. A. Dickey ja W. A. Fuller. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49, 1057–1072, 1981.
- [9] G. Elliot, T. J. Rothenberg ja J. H. Stock. Efficient tests for an autoregressive unit root. *Econometrica*, 64, 813–836, 1996.

- [10] Robert F. Engle ja C. W. J. Granger. Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing. *Econometrica*, 55, no. 2, 251–276, 1987.
- [11] G. Harris. Markov chain Monte Carlo estimation of regime switching vector autoregressions. *ASTIN Bulletin*, 29, 47–79, 1999.
- [12] M. Heikkilä. Tel-järjestelmän yhteinen tuottovelvoite ja yksittäisen yhtiön sijoitustuottojen jäännösvarianssi. Working paper, Suomen Aktuaariyhdistys, 2004.
- [13] John Hibbert, Philip Mowbray ja Craig Turnbull. A Stochastic Asset Model & Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes. Tekninen raportti, Barrie & Hibbert Limited, 2001.
- [14] P. Hilli ja T. Pennanen. Työeläkelaitoksen kassavirta-vastuumalli. Vakuutusvalvontaviraston julkaisusarja, Vakuutusvalvontavirasto, 2006.
- [15] M. Koivu, T. Pennanen ja A. Ranne. Modeling assets and liabilities of a Finnish pension insurance company: a VEqC approach. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005, no. 1, 46–76, 2005.
- [16] James R. Lothian ja Cornelia McCarthy. Equity returns and inflation: the puzzlingly long lags. *Research in Banking and Finance*, 2, 149–166, 2001.
- [17] John M. Mulvey. Generating scenarios for the Towers Perrin investment system. *INTERFACES*, 26, no. March-April, 1–15, 1996.
- [18] John M. Mulvey ja A. Eric Thorlacius. The Towers Perrin global capital market scenario generation system. Teoksessa William T. Ziemba ja John M. Mulvey, toimittajat, *Worldwide asset and liability management*, sivut 286–312. Cambridge University Press, 1998.
- [19] A. Ranne. The Finnish stochastic investment model. Teoksessa *Transactions of the 26th ICA*, sivut 213–238. 1998.
- [20] A. D. Wilkie. A stochastic investment model for actuarial use. *Transactions of the Faculty of Actuaries*, 39, 341–403, 1986.
- [21] A. D. Wilkie. More on a stochastic asset model for actuarial use. *British Actuarial Journal*, 1, 777–964, 1995.
- [22] I. D. Wright. A stochastic asset model using vector auto-regression. Actuarial research report no. 108, City University, 1998.

- [23] Y.H. Yakoubov, M. H. Teeger ja D. B. Duval. Stochastic investment model for asset and liability management. AFIR Colloquium, 1999. www.actuaries.org/members/en/AFIR/colloquia/Tokyo/papers.cfm.

Liitteet

A Pitkän koron sijoitusten arvon muutos

Pitkän koron sijoitusten arvo voidaan lausua muodossa

$$P(Y) = \sum_{t=1}^T \frac{c_t}{(1+Y)^t},$$

missä c_t on korkoinstrumenttien antama käteistuotto vuonna t ja Y on pitkä korko (“yield to maturity”). Pitkän koron sijoitusten arvo on siis positiivinen funktio sekä kassavirroista c_t että Y :stä. Arvon $P(Y)$ derivaatan vastalukua kutsutaan yleisesti *duraatioksi*. Duraatio kuvaa korkosijoitusten herkkyyttä korkotason suhteen ja sitä voidaan käyttää pitkän koron sijoitusten arvon muutoksen approksimoimisessa

$$P(Y) \approx P(Y_0) - D(Y - Y_0).$$

Tämän kaavan ilmeinen ongelma on että se saattaa ennustaa negatiivisia arvoja kun korkotason poikkeama ($Y - Y_0$) on suuri. Tässä työssä ongelma on kierretty käyttämällä niin sanottua *logaritmista duraatiota*, joka määritellään

$$D = -\frac{d \ln P(Y)}{dY}.$$

Kappaleessa 2 esitetty pitkän koron sijoitusten kokonaistuoton kaava perustuu approksimaatioon

$$\Delta \ln P(Y) \approx -D \Delta Y.$$

Toisin sanoen suhteellinen arvon muutos

$$\frac{P_t(Y_t)}{P_{t-1}(Y_{t-1})} \approx \exp(-D(Y_t - Y_{t-1})) = \left(\frac{e^{Y_t}}{e^{Y_{t-1}}} \right)^{-D} \approx \left(\frac{1 + Y_t}{1 + Y_{t-1}} \right)^{-D}.$$

Kappaleessa 2 käytetty pitkän koron sijoitusten kokonaistuoton lauseke saadaan lisäämällä tähän lausekkeeseen käteistuotto, jota approksimoidaan valitsevan korkotason Y avulla.

B VEqC-mallin stationaarisuusehto

Kappaleessa 3 esitetty VEqC-malli voidaan kirjoittaa muotoon

$$z_t = Bz_{t-1} + b + \eta_t,$$

missä

$$z_t = \begin{bmatrix} \Delta_\delta x_t \\ \beta^T x_t - \gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \beta^T A & \beta^T \alpha + I \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta^T \delta \end{bmatrix}, \quad \eta_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jos $\beta\delta = 0$ niin vektorin z odotusarvo totetuttaa

$$Ez_t = BEz_{t-1} = B^t z_0.$$

Jos matriisiin B kaikki ominaisarvot ovat yksikköympyrän sisällä, pätee $Ez_t \rightarrow 0$ kun $t \rightarrow \infty$.

C Estimoidut parametrit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,98 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,93 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -0,07 & 0,09 \\ 0 & -0,03 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\sigma)\rho\text{diag}(\sigma),$$

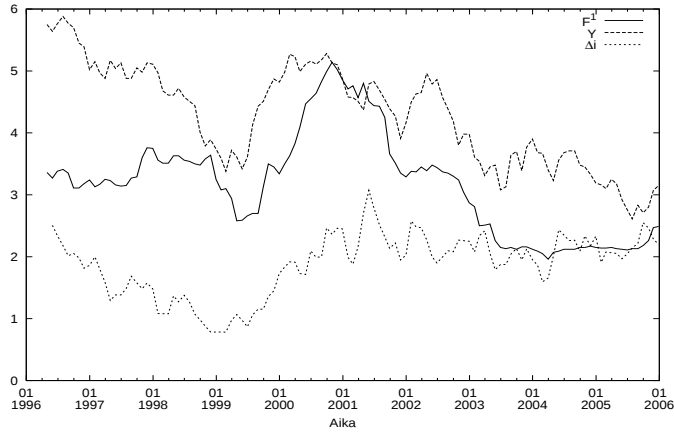
missä korrelaatiomatriisi

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0,400 & 1 & & & & & & & \\ -0,149 & -0,067 & 1 & & & & & & \\ -0,023 & -0,011 & 0,811 & 1 & & & & & \\ -0,088 & -0,093 & 0,710 & 0,826 & 1 & & & & \\ -0,103 & 0,024 & 0,563 & 0,556 & 0,635 & 1 & & & \\ 0,113 & 0,159 & 0,092 & 0,091 & 0,091 & -0,074 & 1 & & \\ 0,192 & 0,126 & -0,048 & -0,002 & -0,097 & 0,071 & 0,019 & 1 & \\ -0,612 & -0,481 & 0,103 & 0,004 & 0,054 & 0,053 & -0,241 & -0,501 & 1 \end{pmatrix}$$

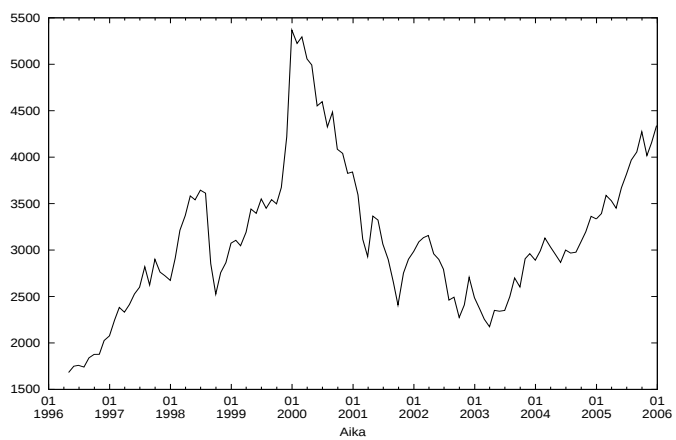
ja hajontavektori

$$\sigma = 10^{-3} (53,976 \ 57,361 \ 64,067 \ 52,025 \ 55,885 \ 58,797 \ 0,565 \ 0,388 \ 0,157).$$

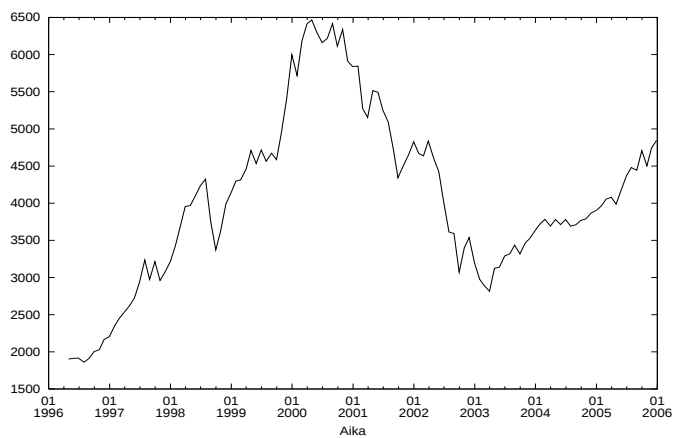
D Kuvat



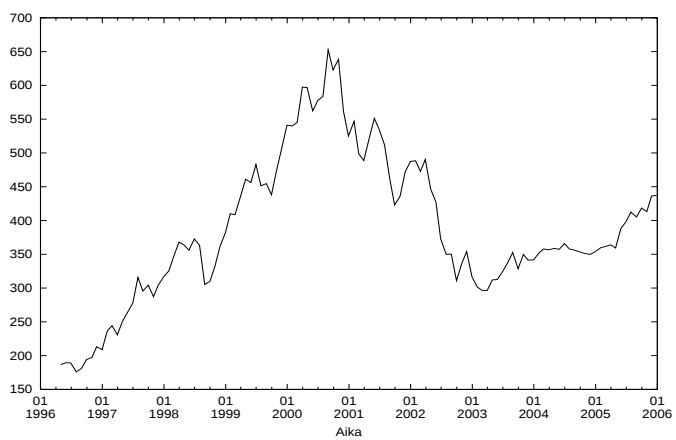
Kuva 1: Historiallinen $F^1, Y, \Delta I$



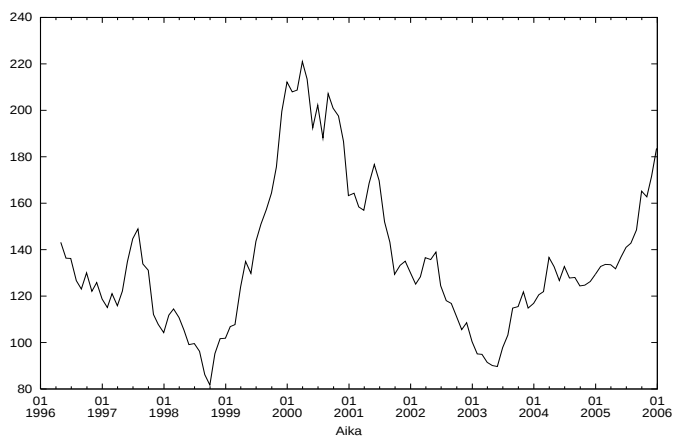
Kuva 2: Historiallinen S^3



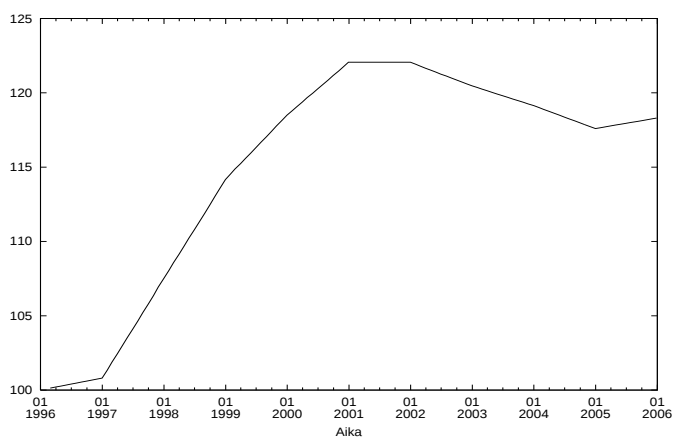
Kuva 3: Historiallinen S^4



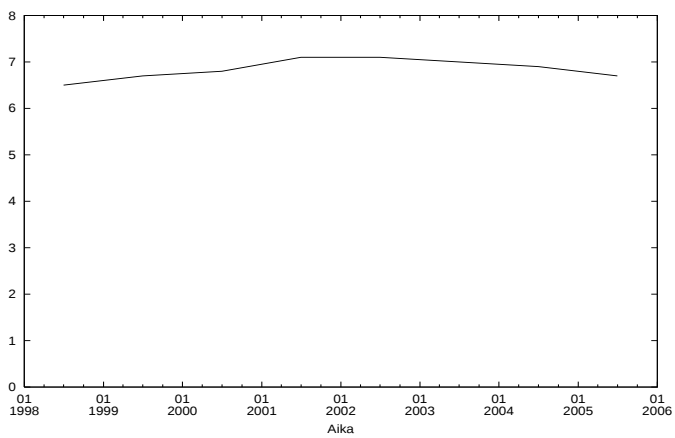
Kuva 4: Historiallinen S^5



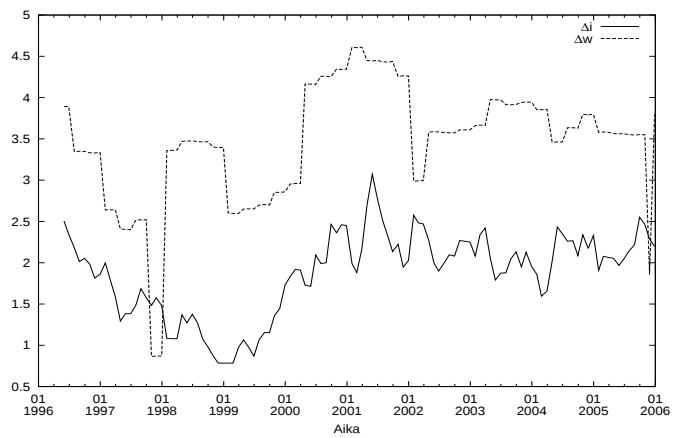
Kuva 5: Historiallinen S^6



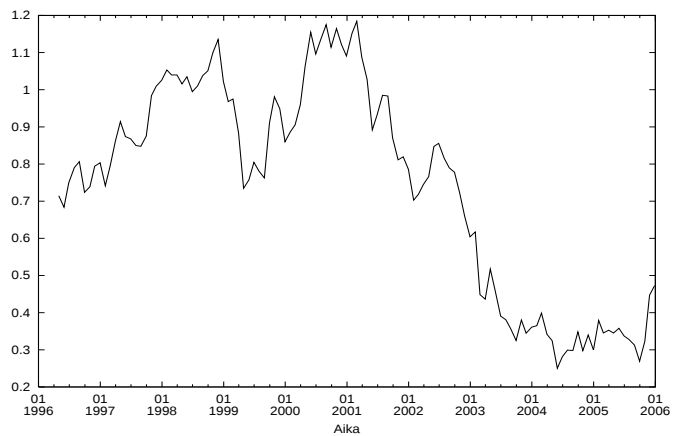
Kuva 6: Historiallinen S^7



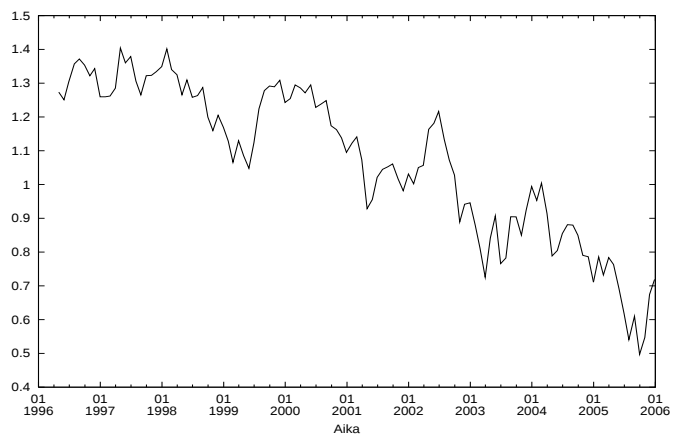
Kuva 7: Historiallinen r



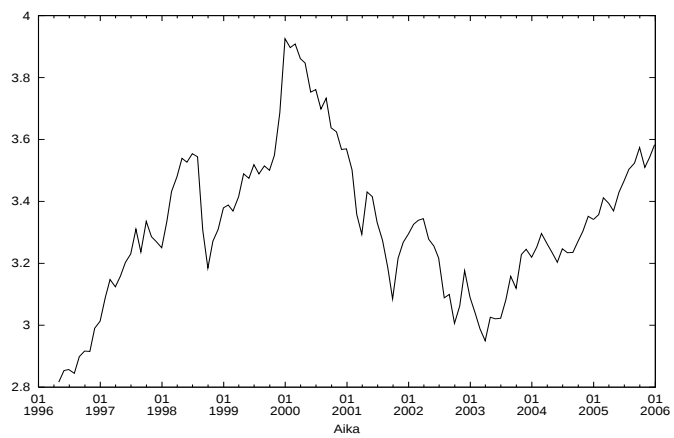
Kuva 8: Historiallinen $\Delta W, \Delta i$



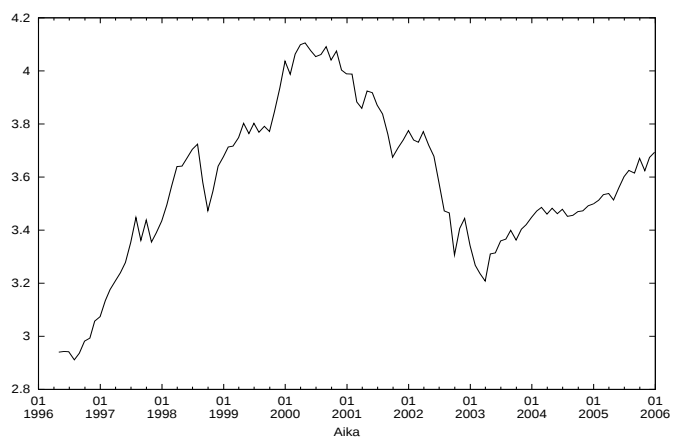
Kuva 9: Historiallinen $\tilde{f}^1$



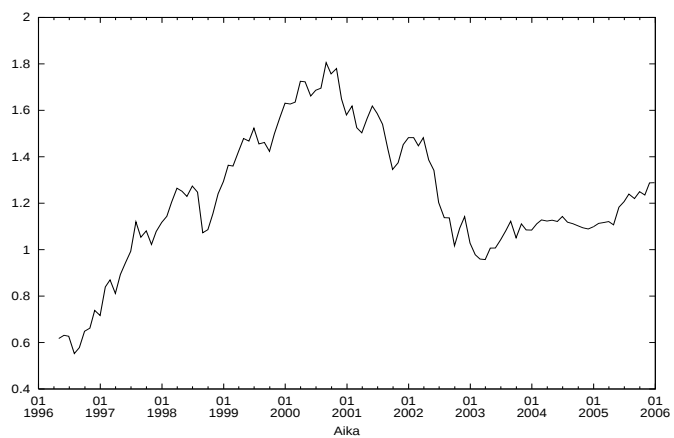
Kuva 10: Historiallinen $\tilde{f}^2$



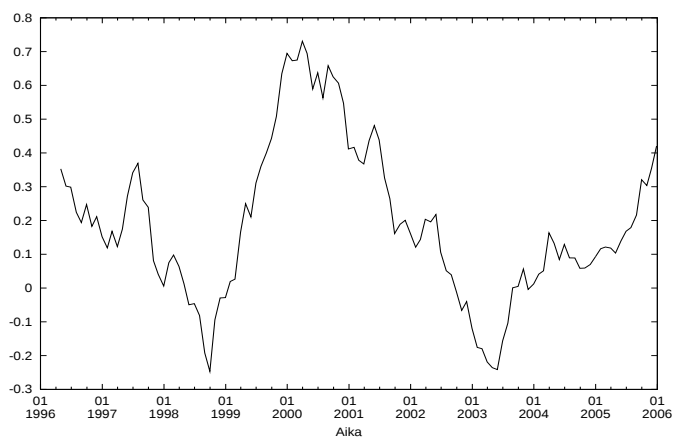
Kuva 11: Historiallinen $\tilde{s}^3$



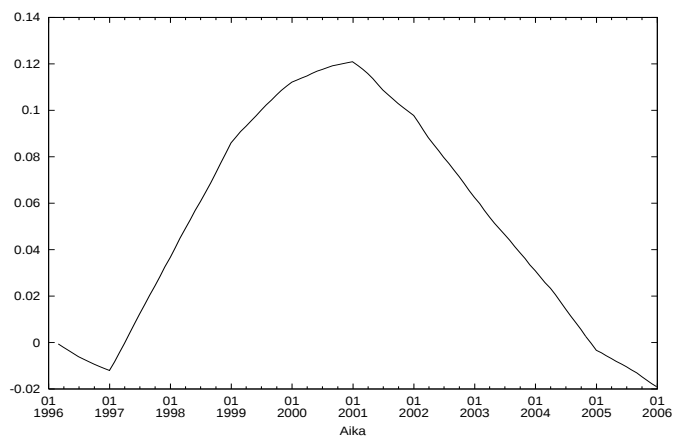
Kuva 12: Historiallinen $\tilde{s}^4$



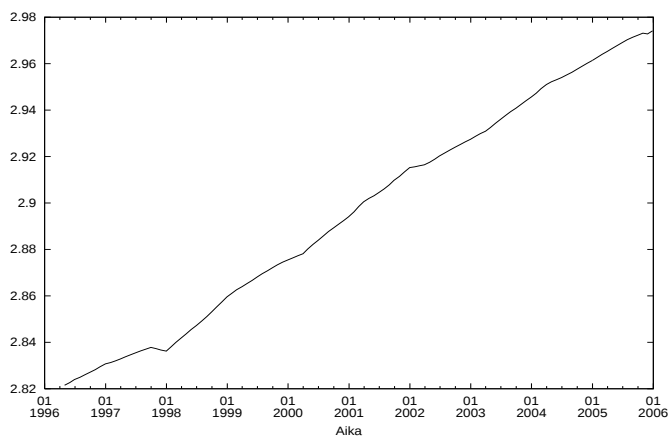
Kuva 13: Historiallinen $\tilde{s}^5$



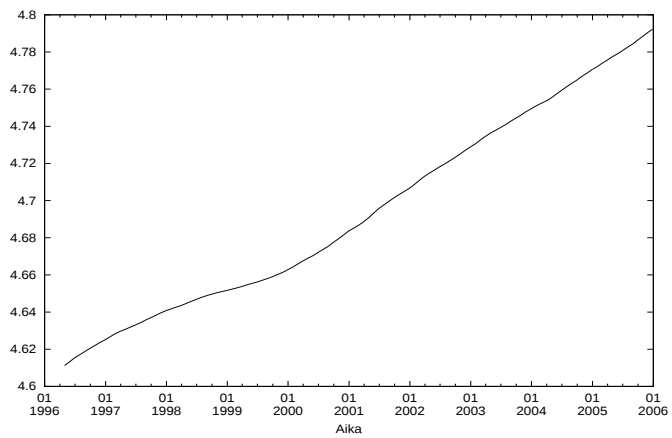
Kuva 14: Historiallinen $\hat{s}^6$



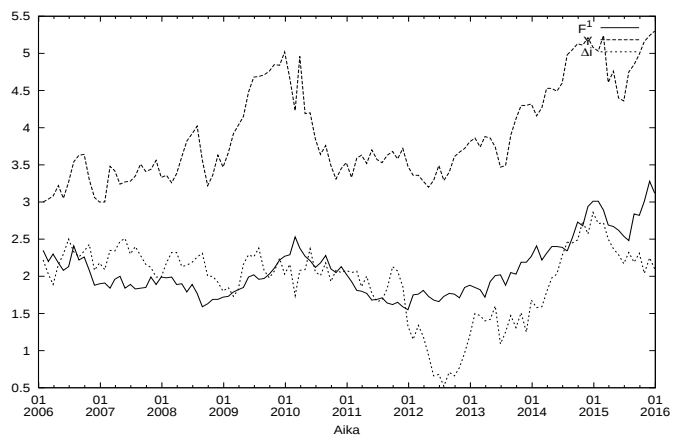
Kuva 15: Historiallinen $\hat{s}^7$



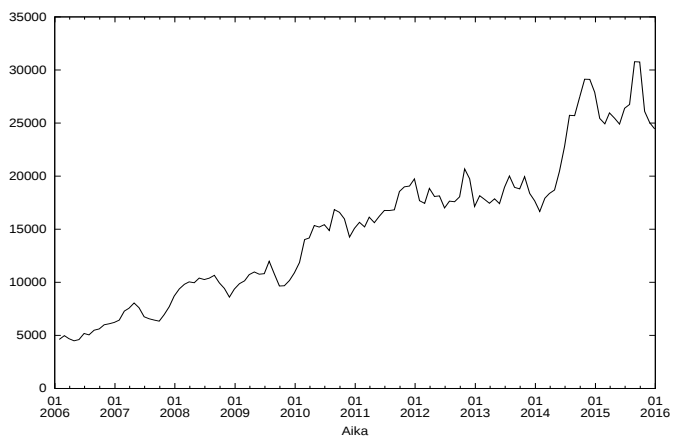
Kuva 16: Historiallinen $\tilde{w}$



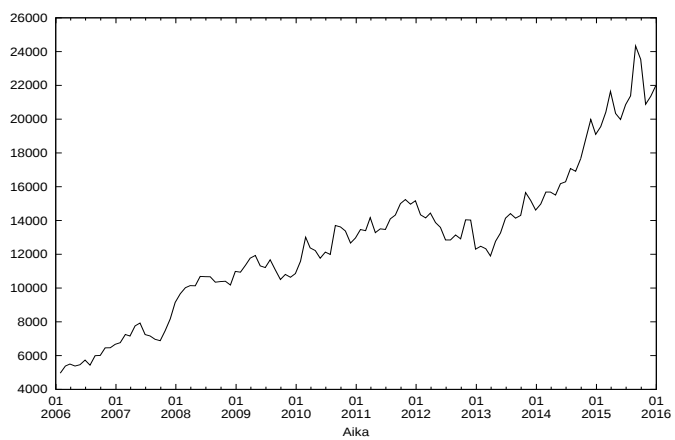
Kuva 17: Historiallinen i



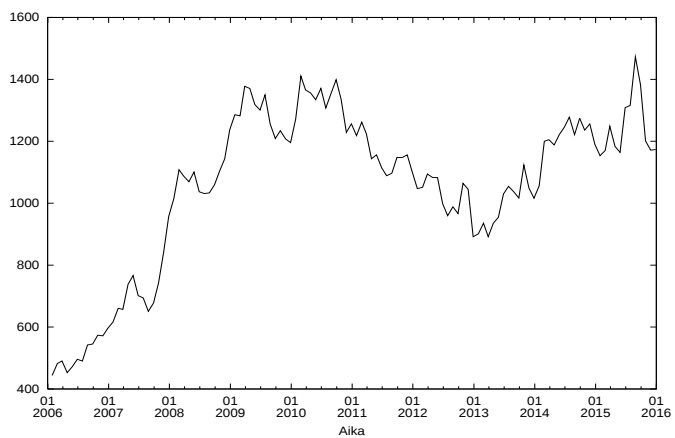
Kuva 18: Simuloitu $F^1, Y, \Delta i$



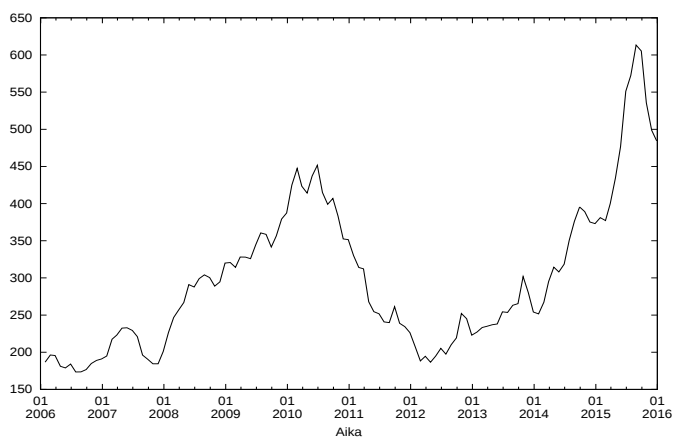
Kuva 19: Simuloitu S^3



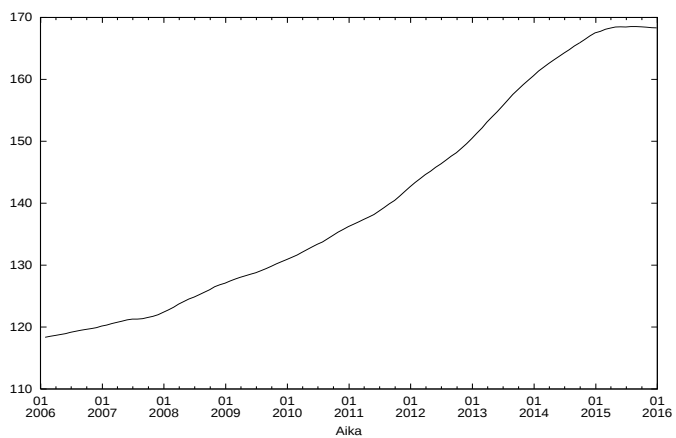
Kuva 20: Simuloitu S^4



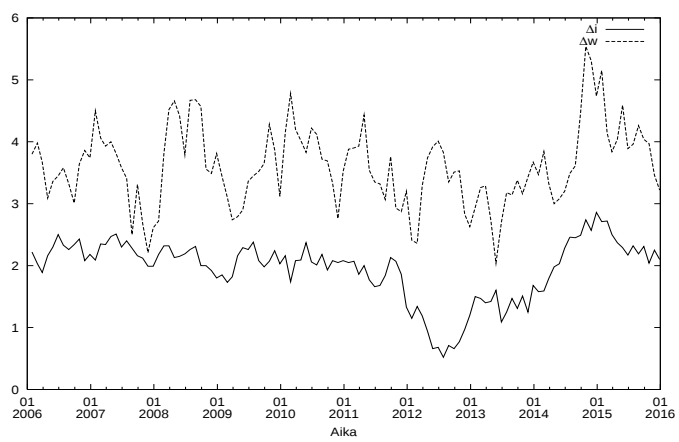
Kuva 21: Simuloitu S^5



Kuva 22: Simuloitu S^6



Kuva 23: Simuloitu S^7



Kuva 24: Simuloitu $\Delta W, \Delta i$

Työeläkelaitoksen kassavirta-vastuumalli

Petri Hilli ja Teemu Pennanen
Liiketoiminnan teknologian laitos
Helsingin kauppakorkeakoulu

11. joulukuuta 2006

Tiivistelmä

Tässä raportissa esitetään yksinkertainen numeeriseen laskentaan soveltuva malli suomalaisen työeläkelaitoksen lakisääteiseen vakuutus-toimintaan liittyville kassavirroille ja vastuille. Malli on rakennettu siten, että se mahdollistaa kassavirtojen ja vastuiden stokastisen kuvaamisen yksinkertaisten stokastisten prosessien avulla. Käytettäessä deterministisiä lähtötietoja malli käyttäytyy konsistentisti Eläketurvakeskuksen laskelmien kanssa kun taas stokastisten ansiotaso- ja inflaatiomallien käyttö aiheuttaa merkittävää vaihtelua kassavirtojen ja vastuiden kehitykselle.

1 Johdanto

Suomalaisen työeläkelaitoksen rahoituksen riskinhallinnassa keskeisimpiä epävarmuuden lähteitä ovat sijoitustuotot sekä vakuutustoimintaan liittyvät kassavirrat ja vastuut. Stokastisia sijoitustuottomalleja on käsitelty paljon; katso esimerkiksi Hilli ja Pennanen [6] ja sen viitteet. Tässä raportissa esitetään numeeriseen laskentaan soveltuva malli vuonna 2007 voimaan tulevan Työntekijän eläkelain (TyEL) 2 §:ssä tarkoitetun työeläkelaitoksen (työeläkeyhtiö, eläkekassa tai eläkesäätiö) lakisääteiseen vakuutustoimintaan liittyville kassavirroille ja vastuille. Malli on rakennettu siten, että se mahdollistaa kassavirtojen ja vastuiden stokastisen kuvaamisen yksinkertaisten stokastisten prosessien avulla. Näin saadaan kuvattua työeläkelaitosten vakuutustoimintaan liittyvää epävarmuutta, mikä on olennainen tekijä laitosten strategisessa riskinhallinnassa.

Suurin osa TyEL-järjestelmän vakuutustoiminnan kassavirroista kulkee (melko) suoraan palkansaajilta ja työnantajilta eläkeläisille niin sanotun jakojärjestelmän kautta, kun taas työeläkelaitosten riskinhallinnassa olennaisia

ovat vain laitosten sijoitusomaisuuteen ja vastuuvelkaan¹ vaikuttavat niin sanottu *rahastoitavat* kassavirrat. Tässä raportissa on esitetty numeeriset mallit rahastoitaville vanhuus- ja työkyvyttömyyseläkkeille, jotka kattavat valtaosan rahastoitavasta vakuutusliikkeestä. Nämä riippuvat TyEL-säännösten määräämällä tavalla väestöstä, työllisyydestä, palkkatasosta ja sijoitustuotoista. Jos väestö, palkat, inflaatio ja/tai sijoitustuotot kuvataan stokastisesti, saadaan stokastinen malli vakuutusliikkeen kassavirroille ja vastuille.

TyEL-lakiin on esitetty muutoksia 8.6.2006 [5], joista tässä raportissa huomioidaan vain suoraan rahastoituihin kassavirtojen ja vastuuelan laskentaan vaikuttavat muutosehdotukset.

Kassavirta-vastuumalli on esitetty Luvussa 2. Luvussa 3 mallin tuloksia on verrattu Eläketurvakeskuksen (ETK) laskelmiin, joita on esitetty viitteessä Biström et al. [1]. Luvussa 4 on esitetty stokastisia simulaatioita, jotka on laskettu käyttämällä ETK:n pitkän aikavälin determinististä laskentamallia väestölle ja raportin [6] stokastista mallia ansiotas- ja elinkustannusindekseille.

2 Kassavirrat ja vastuuelka

TyEL-laitoksen vuotuinen vakuutusliikkeestä sijoitusomaisuuteen tuleva nettokassavirta F_t noudattaa likimain yhtälöä

$$F_t = F_t^+ - F_t^-,$$

missä F_t^+ on TyEL-laitoksen vuonna t keräämien rahastoitavien eläkemaksuosien kokonaissumma ja F_t^- TyEL-laitoksen rahastoista maksettavien eläkkeiden kokonaissumma vuonna t . Sijoitusomaisuuteen vaikuttavat jossain määrin myös TyEL-maksun tasausosaan liittyvät kassavirrat, mutta vuositasolla niiden vaikutukset sijoitusomaisuuteen häviävät.

TyEL-laitosten on noudatettava vakavaraisuussäännöksiä, joissa niin sanottu *vakuutustekninen vastuuelka* on keskeisessä asemassa. Vastuuelka on laskennallinen suure, joka on kehitetty kuvaamaan rahastoista maksettavien eläkkeiden nykyarvoa.

Sekä kassavirrat että vastuuelka riippuvat olennaisesti väestöstä. Koko Suomen väestö jakautuu kunakin vuonna ikä- ja sukupuoliluokkiin, joiden joukkoa merkitään I :llä. Kunkin luokan $i \in I$ väestö jakautuu lisäksi tiloihin $J = \{a, tk, v, m\}$, aktiivit, tk-eläkeläiset, vanhuuseläkeläiset ja muut. Tässä aktiivit koostuvat mallinnettavan laitoksen vakuutetuista palkansaajista,

¹Tässä raportissa sana "vastuuelka" viittaa sekä työeläkeyhtiöiden ja eläkekassojen vastuuelkaan että eläkesäätiöiden eläkevastuuseen.

tk-eläkeläiset koostuvat täysitehoisista TyEL-lain perusteella myönnettyistä tk-eläkkeistä, vanhuuseläkeläisten määrä muodostuu kaikista suomalaisista vanhuuseläkeläisistä ja muut käsittää loput Suomen väestöstä. Alla käytetään merkintöjä

$p_t^{i,j,j'}$ = siirtymätodennäköisyys tilasta j tilaan j' luokassa i vuonna t ,

$K_t^{i,j}$ = luokan i tilan j koko vuonna t ,

P_t^i = luokan i aktiivien TyEL-palkkasumma vuonna t .

2.1 Rahastoitavat eläkemaksut

TyEL-laitos perii TyEL-lain 152 §:n mukaan eläkevakuutetuilta rahastoitavat eläkemaksut sosiaali- ja terveysministeriön vahvistamien laskuperusteiden mukaisesti. TyEL-laitoksen vuosittain rahastoitava kassavirta voidaan lausua

$$F_t^+ = \hat{F}_t^+ + \tilde{F}_t^+ + \varepsilon_t^+,$$

missä $\hat{F}_t^+$ on rahastoitavat vanhuuseläkemaksut, $\tilde{F}_t^+$ rahastoitavat tk-maksut ja ε_t^+ muut rahastoitavat maksut, kuten esimerkiksi lakkautettavan työttömyyseläkkeen maksut.

TyEL-laitoksen yhteenlaskettu rahastoitu vanhuuseläkemaksu vuonna t on

$$\hat{F}_t^+ = \sum_{i \in I} (\kappa_t^i + \gamma_t) P_t^i.$$

missä κ_t^i on luokan i vuoden t eläkemaksun vanhuuseläkeosa, joka määräytyy raportin [8] kaavan (11) mukaan sosiaali- ja terveysministeriön vahvistamien kuolevuuslukujen perusteella. Parametri γ_t määrää vuoden t lisärahastoinnin. Parametrin κ_t^i ja muiden myöhemmin esitettävien vakuutusteknisten parametrien laskentatekniikkaa on esitetty Tuomikosken ja Kilposen raportissa [9]. Lisärahastointi muodostuu yli 53-vuotiailta korotetun TyEL-maksun kautta kerättävästä maksusta ja vuosille 2003-2013 sovitusta lisärahastoinnista. Yli 53-vuotiailta kerättävä korotettu maksu on ETK:n mukaan noin 0,2% kokonaispalkkasummasta. Lassilan [7, s. 33] mukaan vuosille 2003-2013 sovitun lisärahastoinnin tavoitteena on lisätä eläkerahastojen määrää yhteensä 7,5% TyEL-palkkasummasta vuoteen 2013 mennessä. ETK:n mukaan lisärahastoinnista oli vuonna 2005 tekemättä 4,2%. Tässä puuttuva osa lisärahastoinnista oletetaan suoritettavan tasaisesti yhtäsuurin prosenttiosuuksin vuoteen 2013 mennessä vanhuuseläkerahastoihin.

Biström et al. [3, s. 30] mukaan täysitehoiset tk-eläkkeet rahastoidaan kokonaisuudessaan työkyvyttömyyden alkamishetkellä 1.1.2006 alkaen. Jos

oletetaan, että vuonna t alkavien täysitehoisten tk-eläkeläisten määrä luokassa $i \in I$ on $p_t^{i,a,tk}$ aktiivien määrästä, voidaan vuonna t rahastoitavien tk-eläkemaksujen kokonaismäärää approksimoida Tuomikosken ja Kilposen [9, s. 48] perusteella kaavalla

$$\tilde{F}_t^+ = \sum_{i \in I} p_t^{i,a,tk} a^i G_t^i,$$

missä G_t^i on tk-eläkkeen määrä ja a^i tk-eläkkeen pääoma-arvokerroin luokassa i . Biströn et al. [1, s. 20] mukaan tk-eläkkeen määrä luokassa i vuonna t voidaan lausua

$$G_t^i = \tilde{G}_t^i + \hat{G}_t^i,$$

missä $\tilde{G}_t^i$ on tk-eläketapahtumaan mennessä kertynyt eläke ja $\hat{G}_t^i$ on tulevan ajan eläke. Tässä työssä käytetään approksimaatiota

$$\tilde{G}_t^i = \delta_t p_t^{i-1,a,a} \tilde{G}_{t-1}^{i-1} + (1 - \tau_t^i) \rho P_t^i g^i,$$

missä g^i on luokan i vuotuinen karttumaprosentti eläkepalkasta TyEL 64 §:n mukaisesti, τ_t^i on työntekijän osuus TyEL-maksusta TyEL 73 §:n mukaisesti, ρ ottaa huomioon tk-eläkkeelle jäävien keskimääräisestä poikkeavan tulotason ja

$$\delta_t^a = 0, 2 \frac{C_{t-1}}{C_{t-2}} + 0, 8 \frac{W_{t-1}(1 - \hat{\tau}_{t-1}^i)}{W_{t-2}(1 - \hat{\tau}_{t-2}^i)},$$

on TyEL 97 §:n ja ETK:n ohjeen [4] mukainen palkkakerroin. Tässä W_t on ansiotasoindeksi ja C_t kuluttajahintaindeksi vuonna t . Tulevan ajan eläke lasketaan viimeisten viiden vuoden palkkasummasta korotettuna palkkakerroinella,

$$\hat{G}_t^i = \left(\sum_{i'=i+1}^{63} \tilde{g}^{i'} \right) \frac{1}{5} \sum_{t'=1}^5 (1 - \tau_{t-t'}^{i-t'}) \rho P_{t-t'}^{i-t'} \delta_{t-t',t},$$

missä $\tilde{g}^i$ on luokan i vuotuinen tulevan ajan eläkekarttumaprosentti eläkepalkasta TyEL 66 §:n mukaisesti.

2.2 Rahastoista maksettavat eläkkeet

TyEL-lain 12. luvun mukaan TyEL-laitoksen rahastoista maksettavat eläkkeet määräytyvät sosiaali- ja terveysministeriön vahvistamien laskuperusteiden mukaan. Vuonna t rahastoista maksettavien eläkkeiden määrä voidaan lausua

$$F_t^- = \hat{F}_t^- + \tilde{F}_t^- + \varepsilon_t^-,$$

missä $\hat{F}_t^-$ on rahastoista maksettavat vanhuuseläkkeet, $\tilde{F}_t^-$ rahastoista maksettavat tk-eläkkeet ja ε_t^- muut rahastoista maksettavat eläkkeet.

TyEL 174 §:n perusteella vuonna t rahastoista maksettavien vanhuuseläkkeiden kokonaismäärä voidaan lausua

$$\hat{F}_t^- = \sum_{i \in I} K_t^{i,v} \hat{e}_t^i,$$

missä $\hat{e}_t^i$ on luokan i keskimääräinen rahastoitu vanhuuseläke vuonna t . Kokooman [8] kaavan (4) perusteella tätä voidaan approksimoida kaavalla

$$\begin{aligned} \hat{e}_t^i &= \begin{cases} \hat{e}_{t-1}^{i-1} + 0,005 \frac{P_t^i}{\sum_{j \in J} K_t^{i,j}} & \text{jos } i \text{ n ikä on alle 55,} \\ \hat{e}_{t-1}^{i-1} & \text{muuten,} \end{cases} \\ \hat{e}_t^i &= (1 + r_t) \hat{e}_t^i \end{aligned} \quad (1)$$

missä r_t on Sosiaali- ja terveysministeriön vuosittain vahvistama TyEL 171 §:n mukainen täydennyskerroin. Kokooman [8, s. 5] mukaan

$$r_t = r_t^1 + r_t^2, \quad (2)$$

missä r_t^1 on laskuperustekorona mukaan määräytyvä täydennys ja r_t^2 määrää yli 53-vuotiailta korotetun TyEL-maksun kautta kerättävän lisärahastoinnin sekä vuosina 2003-2013 kerättävän lisärahastoinnin yhteismäärän vuonna t . Lakiehdotuksen [5, s. 5] mukaan nykyisessä järjestelmässä vastuuvulkaa kattavien varojen kolmen prosentin tason ylittävät tuotot käytetään vanhuuseläkkeiden rahastoitujen osien korotuksiin, joten laskuperustekorona mukainen rahastojen täydennys lasketaan kaavalla

$$r_t^1 = \frac{(\hat{r}_t - 0,03)L_{t-1}}{\check{L}_t}, \quad (3)$$

missä $\hat{r}_t$ on laskuperustekorko, L_{t-1} rahastoitujen eläkkeiden vastuu vuonna $t - 1$ ja $\check{L}_t$ on rahastoitujen vanhuuseläkkeiden vastuu ennen täydennyksiä. Rahastoitujen eläkkeiden vastuun laskenta on kuvattu kappaleessa 2.3. Kokooman [8] kaavojen (34) ja (50) perusteella

$$\check{L}_t = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \theta_t^{i,j} K_t^{i,j} \check{e}_t^i,$$

missä $\theta_t^{i,j}$ on laskettu sosiaali- ja terveysministeriön vahvistamien kuolevuuslukujen perusteella.

Jos lisärahastoinnin aiheuttama vastuuvelan nousu $r_t^2 \tilde{L}_t$ ja sitä varten kerättävä osuus palkkasummasta $\gamma_t \sum_{i \in I} P_t^i$ oletetaan yhtäsuuriksi, niin saadaan

$$r_t^2 = \frac{\gamma_t \sum_{i \in I} P_t^i}{\tilde{L}_t}. \quad (4)$$

TyEL 175 §:n perusteella vuonna t rahastoista maksettavien tk-eläkkeiden kokonaismäärä on

$$\tilde{F}_t^- = \sum_{i \in I} \tilde{E}_t^i,$$

missä on $\tilde{E}_t^i$ luokan i rahastoitu tk-eläkemeno vuonna t . Biström et al. [2, s. 1] perusteella tk-eläkerahastoa voidaan approksimoida kaavalla

$$\tilde{E}_t^i = p_t^{i-1, tk, tk} \tilde{E}_{t-1}^{i-1} + p_t^{i-1, a, tk} G_t^i.$$

2.3 Vastuut

TyEL-lain 11. luvun mukaan TyEL-laitoksen vastuuvelka määräytyy sosiaali- ja terveysministeriön vahvistamien laskuperusteiden mukaan. TyEL-laitoksen rahastoitujen eläkkeiden vastuuvelka voidaan lausua

$$L_t = \hat{L}_t + \tilde{L}_t + \eta_t, \quad (5)$$

missä $\hat{L}_t$ on vanhuuseläkevastuut, $\tilde{L}_t$ täysitehoiset tk-eläkevastuut ja η_t muut eläkevastuut.

Kokooman [8] kaavojen (34) ja (50) mukaan TyEL-laitoksen vuoden t vanhuuseläkevastuu on

$$\hat{L}_t = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \theta_t^{i,j} K_t^{i,j} \hat{e}_t^i. \quad (6)$$

Kokooman [8] kaavan (51) perusteella TyEL-laitoksen vuoden t tk-eläkevastuuta voidaan approksimoida kaavalla

$$\tilde{L}_t = \sum_{i \in I} a^i \tilde{E}_t^i,$$

missä a^i tk-eläkkeen ikä- ja sukupuolikohtainen pääoma-arvokerroin luokassa i . Tk-eläkkeen kesto approksimoidaan luokasta $i \in I$ riippuvaksi vakioksi.

2.4 Lakiehdotus

Hallitus antoi 8.6.2006 lakiehdotuksen Eduskunnalle eläkelaitosten toimintatapääomaa ja vastuuvelkaa koskevien säännösten muuttamiseksi [5]. Lakiehdotuksen hyväksyminen vaikuttaisi vanhuuseläkkeiden täydennyksiin ja vastuuvelan määräytymiseen lisäämällä vastuuvelkaan uuden osaketuottosidonnaisen osan.

Lakiehdotuksen 171 § mahdollistaisi vanhuuseläkkeiden täydennysten kohdistamisen eri suuruisena eri ikäluokille. Lakiehdotuksen perusteluissa on esitetty täydennyksien kohdistamista kokonaisuudessaan yli 55 vuotiaiden alkaneeisiin ja vastaisiin eläkkeisiin [5, s. 17], jolloin kaava (1) korvattaisiin kaavalla

$$\hat{e}_t^i = \begin{cases} \tilde{e}_t^i & \text{jos } i\text{n ikä on alle 55,} \\ \tilde{e}_t^i(1 + r_t) & \text{muuten,} \end{cases} \quad (7)$$

missä r_t laskettaisiin kaavan (2) sijaan kaavalla

$$r_t = r_t^1 + r_t^2 + r_t^3,$$

missä r_t^3 on osaketuottosidonnaisen vastuuvelan mukaan määräytyvä vanhuuseläkevastuiden täydennys. Lakiehdotus sisältää muutoksen laskuperustekorona mukaiseen vanhuuseläkkeiden täydennykseen. Ehdotuksen mukaan 90% vanhuuseläkkeiden täydennyksistä määräytyisi laskuperustekorona perusteella [5, s. 10]. Tällöin kaava (3) korvataan kaavalla

$$r_t^1 = \frac{\max((0, 9\hat{r}_t - 0,03), 0)(\hat{L}_{t-1} + \tilde{L}_{t-1} + \eta_{t-1})}{\tilde{L}_t^{55}},$$

missä

$$\tilde{L}_t^{55} = \sum_{i \in I^{55}} \sum_{j \in J} \theta_t^{i,j} K_t^{i,j} \tilde{e}_t^i,$$

on vanhuuseläkkeiden rahastoitujen osien vastuuvelka 55 vuotta täyttäneille ennen täydennyksiä ja I^{55} 55 vuotta täyttäneiden ikä- ja sukupuoliluokien joukko. Myös lisärahastointi kohdistettaisiin 55 vuotta täyttäneiden vanhuuseläkkeiden rahastoiuihin osiin, joten kaava 4 korvattaisiin kaavalla

$$r_t^2 = \frac{\gamma_t \sum_{i \in I} P_t^i}{\tilde{L}_t^{55}}.$$

Ehdotuksen 171 §:n mukaan osaketuottosidonnaisen vastuuvelan L_t^o ollessa järjestelmätasolla yli 5%:a vastuuvelasta, ylitykset siirretään rahastoitujen vanhuuseläkkeiden täydennyksiin. Osaketuottosidonnaisen vastuuvelan

mukainen täydennyskerroin voidaan siten lausua

$$r_t^3 = \frac{l_{t-1}^o}{\tilde{L}_t^{55}},$$

missä l_t^o on ylityksen mukainen siirto osaketuottosidonnaisesta vastuuvasta vanhuuseläkevastuuihin.

Osaketuottosidonnainen vastuuvasta L_t^o on osa eläkelaitoksen vastuuvastaa, joten kaava (5) korvattaisiin kaavalla

$$L_t = \hat{L}_t + \tilde{L}_t + L_t^o + \eta_t.$$

Osaketuottosidonnaisen vastuuvastan L_t^o ja sen mukaisen siirron l_t^o laskuperusteet ovat tätä kirjoitettaessa laatimatta.

3 Vertailu Eläketurvakeskuksen tuloksiin

Biström et al. [1] ovat esittäneet laskelmia koko TyEL-järjestelmän palkkasummasta ja vanhuuseläkevastuusta vuosille 2005-2030 olettaen, että ansiotason reaalin muutos on 1,75% ja reaalin laskuperustekorko 3,33% vuodessa. Yllä esitettyä mallia testattiin vertaamalla sen antamia tuloksia ETK:n laskelmiin käyttäen samoja oletuksia. Lisäksi oletetaan, että kunkin luokan $i \in I$ palkkasumma noudattaa yhtälöä

$$P_t^i = K_t^{i,a} \bar{P}_t^i, \quad (8)$$

missä keskipalkan $\bar{P}_t^i$ reaalin vuosimuutos on 1,75%. Keskipalkkojen $\bar{P}_{2005}^i$ lähtöarvoina on käytetty ETK:lta saatuja keskipalkkoja koskien koko TyEL-järjestelmää. Lisäksi laskennassa on käytetty ETK:n antamia deterministisiä ennusteita luvuille $K_t^{i,j}$ sekä alkuarvoja rahastojen $\hat{e}_{2005}^i$ ja $\tilde{E}_{2005}^i$ koolle sekä kertoimille a^i ja ρ .

Taulukossa 1 on esitetty kaavan (8) perusteella laskettu palkkasumma vuosille 2005-2030 sekä Biström et al. [1, s. 47] esittämä vastaava ETK:n laskelma. Palkkasumma poikkeaa tarkasteluperiodilla enimmillään 2%. Lähtötöhtöjen palkkasummat poikkeavat toisistaan, koska tässä on käytetty uudempaa palkkadataa kuin Biström et al. laskelmissa.

Taulukossa 2 on esitetty yllä annettujen oletusten ja Luvun 2 kaavojen perusteella lasketut vanhuuseläkevastuut suhteessa palkkasummaan sekä Biström et al. [1, s. 74] esittämä vastaava ETK:n laskelma. Eroavuudet tulosten välillä voivat johtua edellä mainitusta erosta palkkoissa ja vuosien 2003-2013 lisärahoitustien kohdistamisesta sekä ajallisesti että eri eläkelajeille.

Taulukko 1: TyEL-järjestelmän palkkasumma vuoden 2004 hintatasossa (M€).

Vuosi	Kaava (8)	ETK
2005	39987	39242
2010	45001	44879
2020	51309	51697
2030	59114	59777

Taulukko 2: TyEL-järjestelmän vanhuuseläkevastuut suhteessa palkkasumaan.

Vuosi	Vastuumalli	ETK
2005	0,98	1,0
2010	1,17	1,2
2015	1,37	1,3
2025	1,56	1,5

4 Stokastisia simulaatioita

Seuraavassa oletetaan, että ansiotaso- ja elinkustannusindeksi sekä palkat ovat stokastisia. Laskuperustekorko on vakio 5.2%. Luokan i palkkasumma voidaan lausua

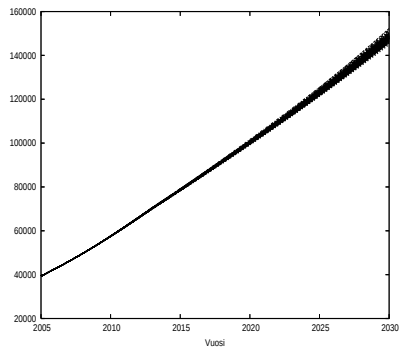
$$P_t^i = K_t^{i,a} \bar{P}_t^i,$$

missä $\bar{P}_t^i$ on luokan i keskipalkka. Keskipalkkoja voidaan approksimoida kaavalla

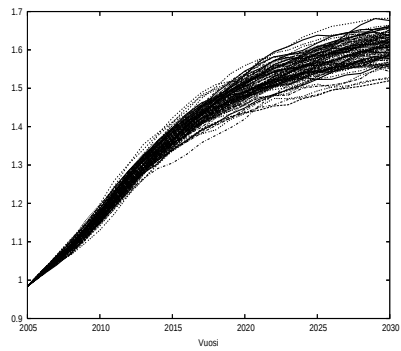
$$\bar{P}_t^i = \bar{P}_{2005}^i \frac{W_t}{W_{2005}}.$$

Seuraavassa käytetään Hilli et al. [6] esitettyä aikasarjamallia kuvaamaan ansiotaso- ja elinkustannusindeksien kehitystä.

Kuvissa 1 - 4 on esitetty 100 simulaation perusteella lasketut vanhuus- ja tk-eläkevastuut sekä vastaavat nettokassavirrat vuosille 2005-2030.

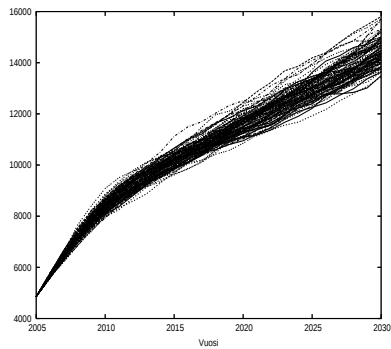


(a) Absoluuttinen (M€).

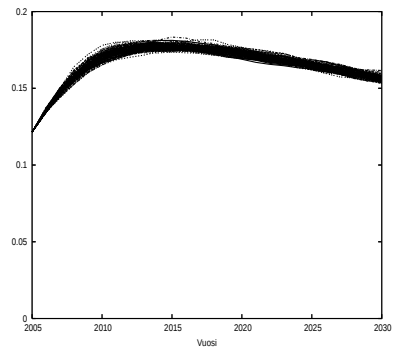


(b) Suhteessa palkkasummaan.

Kuva 1: TyEL-järjestelmän vanhuuseläkevastuut $\hat{L}$.

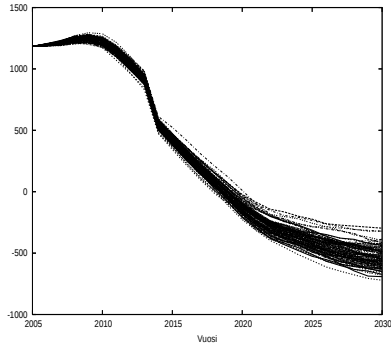


(a) Absoluuttinen (M€).

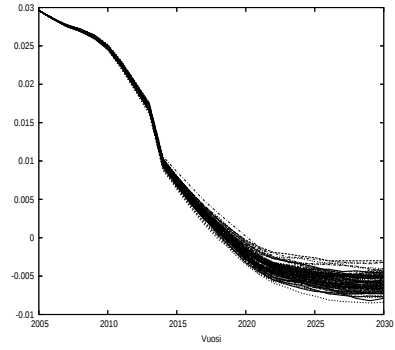


(b) Suhteessa palkkasummaan.

Kuva 2: TyEL-järjestelmän tk-eläkevastuut $\tilde{L}$.

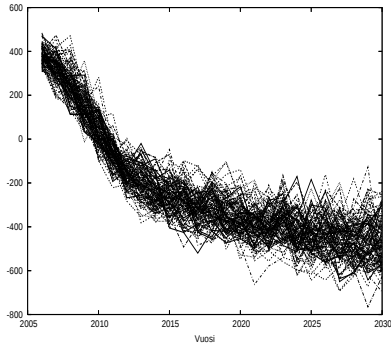


(a) Absoluuttinen (M€).

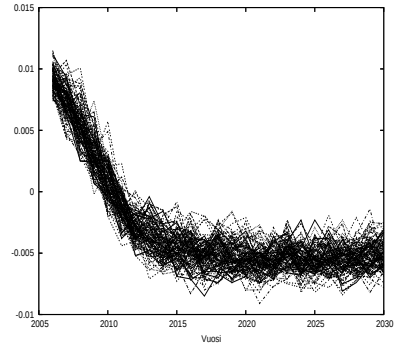


(b) Suhteessa palkkasummaan.

Kuva 3: TyEL-järjestelmän vanhuuseläkeliikeen nettokassavirta, $\hat{F}_t$.



(a) Absoluuttinen (M€).



(b) Suhteessa palkkasummaan.

Kuva 4: TyEL-järjestelmän tk-eläkeliikeen nettokassavirta, $\tilde{F}_t$.

Kiitokset Kiitämme Peter Biströmiä, Heikki Palmia, Ismo Riskua ja Antti Tanskasta hyödyllisistä kommenteista ja ehdotuksista, joista on ollut suuri apu tämän raportin kirjoittamisessa. Kiitämme Sosiaali- ja terveysministeriötä tutkimuksen rahoittamisesta.

Viitteet

- [1] P. Biström, T. Klaavo, I. Risku ja H. Sihvonen. Eläkemenot, maksut ja rahastot vuoteen 2075. Eläketurvakeskuksen raportteja, Eläketurvakeskus, 2004.
- [2] Eläketurvakeskus. Yleiskirje B 7/2003, 2003.
- [3] Eläketurvakeskus. Yleiskirje A 20/2004, 2004.
- [4] Eläketurvakeskus. Työeläkkeiden indeksiturva 1.1.2005. 2005.
- [5] HE77/2006. Hallituksen esitys Eduskunnalle eläkelaitosten toimintapääomaa ja vastuuvalkaa koskevien säännösten muuttamiseksi. 2006.
- [6] P. Hilli, M. Koivu ja T. Pennanen. Sijoitustuottomalli työeläkelaitoksille. Vakuutusvalvontaviraston julkaisusarja, 2006.
- [7] J. Lassila ja T. Valkonen. Yksityisalojen eläkeuudistuksen taloudelliset vaikutukset. Sarja b, Elinkeinoelämän tutkimuslaitos, 2005.
- [8] TEL-P 2005. TEL:n mukaisen perusvakuutuksen erityisperusteet. Kokooma, 2005.
- [9] J. Tuomikoski ja S. Kilponen. Lakisääteisen työeläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa. Eläketurvakeskuksen raportteja 2003:31, Eläketurvakeskus, 2003.

Sijoitusuudistuksen vaikutus yksityisen sektorin työeläkevakuutusmaksuun

Petri Hilli

Liiketoiminnan teknologian laitos
Helsingin kauppakorkeakoulu

11. joulukuuta 2006

Tiivistelmä

Tässä raportissa esitetään alustavia laskelmia työeläkevakuutusmaksun kehityksestä vuoteen 2034 saakka nykyisessä työeläkejärjestelmässä sekä Hallituksen 8.6.2006 antaman lakiesityksen mukaisessa järjestelmässä. Laskelmissa on huomioitu sijoitustuottoihin, vakuutusliikkeen kassavirtoihin, palkkasummaan ja vanhuuseläkemenoon liittyvä epävarmuus. Hallituksen lakiesityksen mukaisessa järjestelmässä maksun mediaani alenisi noin 2-2,5%:a vuoteen 2034 mennessä verrattuna nykyiseen järjestelmään kun osakesijoitusten osuutta sijoitusportfoliossa lisätään. Maksun tasoon liittyy kuitenkin huomattavaa epävarmuutta. Maksun tasoon vaikuttavat sijoitusstrategia, valittu konkurssiriski sekä lopulliset säännökset. Säännöksistä laskuperustekoron noston rajoittaminen vaikuttaa asiakaspalautusten määrään ja kasvattaa huomattavan suurten asiakaspalautusten todennäköisyyttä. Asiakaspalautusten maksaminen vakavaraisuusrajalle asti ei ole täysin työeläkejärjestelmän tavoitteiden mukaista, sillä se nostaa pikällä aikavälillä sekä työeläkevakuutusmaksua että konkurssiriskiä suhteessa esitettyyn vaihtoehtoon.

1 Johdanto

Suomen yksityisten sektorin lakisääteisen työeläkejärjestelmän ensisijaisena tavoitteena on turvata työuran aikana ansaittujen työeläkkeiden maksaminen eläkkeelle jäämisestä eläkkeen päättymiseen asti. Yksityisen alan työeläkejärjestelmä on osittain rahastoiva, jossa osa etuusperusteisesti ansaitusta eläkemenosta rahoitetaan sitä varten säästetyistä varoista ja loput suoraan

yksityisen sektorin työntekijöiltä ja -antajilta kerättävistä työeläkevakuutusmaksuista (TyEL-maksu). Odotettavissa oleva suurten ikäluokkien eläköityminen seuraavien parin vuosikymmenen aikana yhdessä pienenevien työikäisten sukupolvien kanssa on tuonut paineita TyEL-maksujen nostamiseen ja johtanut pohdintaan siitä, pitäisikö työeläkesäännöksiä muuttaa nousupaineen pienentämiseksi. Hallitus esittikin 8.6.2006 muutoksia 1.1.2007 voimaan tulevaan Työntekijän eläkelakiin (TyEL), joiden tavoitteena on alentaa tulevia työeläkevakuutusmaksuja [8]. Lakiesitys perustuu pitkälti eläkeneuvotteluryhmän ehdotuksiin [4].

Tässä raportissa tutkitaan eläkkeiden rahastointiperiaatteisiin vaikuttavien Hallituksen esitysten vaikutusta TyEL-maksuun ja järjestelmän vakaaraisuuteen. Sijoitustuotot, ansiotaso ja inflaatio mallinnetaan stokastisina prosesseina. Tutkimuksessa käytetty laskentamalli on rakennettu siten, että sekä eläkemeno että eläkemenon rahoitus lasketaan samassa mallissa. Eläkemeno maksetaan vuosittain kerättävällä tasausosalla ja rahastoista maksettavilla osilla, jolloin rahaa sitovia tasaus- ja tasoitusvastuita ei tarvita tai ne voidaan olettaa vakioiksi. Tilanne vastaa yleisperiaatteeltaan esimerkiksi Valtion Eläkerahaston toimintaa, jossa valtio maksaa eläkemenon ja perii osan eläkemenosta Valtion Eläkerahastolta etukäteen määrätyn säännöksiin. Lähestymistavalla saaduista TyEL-maksuista poikkeavia TyEL-maksuja ja tarvittavia pääomia voidaan pitää nykyisen kaltaisen hajautetun järjestelmän ylläpidon kustannuksina tai hyötyinä.

Eläkeneuvotteluryhmän ja Biström et al. [2] raporteissa esitetään Eläketurvakeskuksen (ETK) deterministisiä pitkän aikavälin laskelmia TyEL-maksun kehityksestä sekä herkkyyksianalyysiä sijoitustuottojen suhteen, mutta varsinaista sijoitustoimintaan, ansiotasoon tai inflaatioon liittyvää stokastiikkaa laskelmissa ei ole. Heikkilä [10] ja eläkeneuvotteluryhmä ovat tutkineet osakesijoitusten lisäämisen vaikutusta työeläkeyhtiön ja -järjestelmän vakaaraisuuteen, mutta vaikutusta TyEL-maksuun ei suoraan tutkittu. Eläkeneuvotteluryhmän päätelmät perustuvatkin pitkälti kahden erillisen mallin, ETK:n deterministisen mallin ja työeläkeyhtiö Varman stokastisen sijoitusmallin tulosten analyysiin ja epäsuoraan yhdistämiseen. Heikkilän ja eläkeneuvotteluryhmän tutkimuksissa järjestelmä on mallinnettu yhtiökohtaisesti, kun taas tässä raportissa ja ETK:n laskelmissa järjestelmä on mallinnettu yhtenä kokonaisuutena, toisin sanoen kuin kaikki eläkevarat olisivat yhdessä eläkelaitoksessa.

Tässä tutkimuksessa käytetään Hilli et al. [11] esittämää stokastista sijoitustuottomallia kuvaamaan sijoitustuottoihin, ansiotaso- ja elinkustannusindeksiin liittyvää epävarmuutta. Malli perustuu Englen ja Grangerin [6] esittämään yhteisintegroituvuusmalliin ja poikkeaa huomattavasti eläkeneuvotteluryhmän käyttämästä mallista mahdollistaen stokastisten tekijöiden pitkän

aikavälin relaatioiden monipuolisemman huomioimisen. Lisäksi tässä tutkimuksessa tuotot ovat lognormaalisesti jakautuneita kun taas eläkeneuvotteluryhmän laskelmissa tuotot ovat normaalijakautuneita. Normaalijakaumaoleuksesta seuraa esimerkiksi, että ilman lisärajoitteita osakeindeksit tai korot voisivat saada negatiivisia arvoja. Lisärajoitteista seuraa kuitenkin uusia ongelmia, kuten esimerkiksi positiivisen todennäköisyyssmassan kerääntyminen poikkeaviin pisteisiin.

Esitettävien laskelmien perusteella TyEL-maksun tulevaan tasoon liittyy huomattavaa epävarmuutta. TyEL-maksun ja eläkejärjestelmän vakavaraisuuden jakaumat ovat varsin epäsymmetrisiä, joten vain muutaman tilastollisten tunnushuvun ja erityisesti odotusarvojen raportointi saattaa johtaa virheellisiin päätelmiin. Hallituksen lakiesityksen mukaisessa järjestelmässä TyEL-maksun mediaani olisi n. 2-2,5%:a alempi kuin nykyisessä järjestelmässä. Heikkojen sijoitustuottojen tapauksessa lakiesityksellä ei olisi juurikaan vaikutusta TyEL-maksuun. Lopulliseen maksuun vaikuttavat monet tekijät, joista ei ollut tarkkaa tietoa laskelmia tehtäessä. Esimerkiksi laskuperustekorona noston rajoittaminen yhteen prosenttiin vuodessa vaikuttaa siihen, mitä kautta TyEL-maksua alennetaan, varsinaisten rahastojen vaiko asiakaspalautusten kautta. Rajoituksen takia hyvien sijoitustuottojen aikaan tuotot eivät välttämättä ohjaudu riittävän nopeasti eläkerahastojen täydennyksiin vaan jaetaan asiakkasiirtoina takaisin. Keskimääräisten ja heikkojen sijoitusten tapauksessa rajoituksella tai sen poistamisella ei olisi juurikaan merkitystä. Laskelmien perusteella asiakaspalautusten jakaminen lakiesityksen sallimalle vakavaraisuusrajalle asti ei ole paras mahdollinen ratkaisu eläkejärjestelmän pitkän aikavälin tavoitteiden kannalta. On löydettävissä sääntöjä, joilla säävutettaisiin alemmat TyEL-maksut suhteessa konkurssitodennäköisyyteen.

Tutkimuksessa huomioitavat Hallituksen lakiesityksen muutosehdotukset koskevat pääosin rahastoista maksettavien vanhuuseläkkeiden määräytymistä, joten muiden kuin vanhuuseläkemenon osuus TyEL-maksusta mallinnetaan vakiona. Kappaleessa 2 esitetään yksinkertainen numeerisen laskentaan soveltuva malli vanhuuseläkemenon laskentaan. Kappaleessa 3 esitetään yksinkertainen malli TyEL-maksun laskentaan ja vanhuuseläkemenon rahoitukseen koko TyEL-järjestelmän tasolla. Vanhuuseläkemenon rahoitus perustuu Hillin ja Pennasen [13] esittämään laskentamalliin ja sitä täydennetään puuttuvilta osin. Kappaleessa 4 esitetään malli eläkejärjestelmän vakavaraisuuden laskentaan. Kappaleessa 5 esitetään tutkimuksessa käytetyt sijoitusluokat ja sijoitusstrategiat. Kappaleessa 6 tutkitaan simuloimalla TyEL-maksua sekä nykyjärjestelmässä että Hallituksen lakiesityksen mukaisesta työeläkejärjestelmästä eri sijoitusstrategioilla ja eri oletuksilla asiakaspalautusten sekä laskuperustekorona määräytymisestä.

2 Vanhuuseläkemeno

Koko Suomen väestö jakautuu kunakin vuonna ikä- ja sukupuoliluokkiin, joiden joukkoa merkitään I :llä. Kunkin luokan $i \in I$ väestö jakautuu lisäksi tiloihin $J = \{a, v, m\}$, aktiivit, vanhuuseläkeläiset ja muut. Tässä aktiivit koostuvat TyEL-säännösten mukaan vakuutetuista palkansaaajista, vanhuuseläkeläisten määrä muodostuu kaikista suomalaisista vanhuuseläkeläisistä ja muut käsittää loput Suomen väestöstä. Väestön tilamallissa käytetään merkintöjä

$p_t^{i,j,j'}$ = siirtymätodennäköisyys tilasta j tilaan j' luokassa i vuonna t ,
 $K_t^{i,j}$ = luokan i tilan j koko vuonna t .

Luokan $i \in I$ palkkasumma lasketaan Hillin ja Pennasen [13] mukaan kaavalla

$$P_t^i = K_t^{i,a} \bar{P}_t^i,$$

missä keskipalkkaa $\bar{P}_t^i$ approksimoidaan

$$\bar{P}_t^i = \bar{P}_0^i \frac{W_t}{W_0},$$

missä W_t on ansiotasoindeksi. Kokonaispalkkasumma P_t on tällöin

$$P_t = \sum_{i \in I} P_t^i.$$

TyEL-lain 4. luvun mukaan vuonna t maksettavien TyEL-vanhuuseläkkeiden määrä lasketaan

$$\bar{F}_t^- = \sum_{i \in I} E_t^i,$$

missä E_t^i on alkaneiden vanhuuseläkkeiden määrä. Alkaneiden vanhuuseläkkeiden määrää approksimoidaan kaavalla

$$E_t^i = p_t^{i,v,v} E_{t-1}^{i-1} \delta_t^v + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J \setminus \{v\}} p_t^{i,j,v} \eta_t^i e_{t-1}^{i-1} \delta_t^a,$$

missä δ_t^v on TyEL 99 §:n mukainen työeläkeindeksin muutos, η_t^i muuntaa alkavan eläkkeen vastaamaan eläkkeen alkamisikää $i \in I$ TyEL 12 §:n ja TyEL 82 §:n mukaisesti, e_t^i on luokan i TyEL 64 §:n ja 73 §:n mukaan laskettu vastaisten vanhuuseläkkeiden euromääräinen karttuma ja δ_t^a TyEL 97 §:n

mukainen palkkakerroin. Työeläkeindeksi voidaan ETK:n soveltamisohjeen [5] perusteella laskea

$$\delta_t^v = 0,8 \frac{C_{t-1}}{C_{t-2}} + 0,2 \frac{W_{t-1}(1 - \hat{\tau}_{t-1}^i)}{W_{t-2}(1 - \hat{\tau}_{t-2}^i)},$$

missä C_t on elinkustannusindeksi ja $\hat{\tau}_t^i$ luokan $i \in I$ työntekijän TyEL-maksu. Palkkakerroin voidaan ETK:n soveltamisohjeen [5] perusteella laskea

$$\delta_t^a = 0,2 \frac{C_{t-1}}{C_{t-2}} + 0,8 \frac{W_{t-1}(1 - \hat{\tau}_{t-1}^i)}{W_{t-2}(1 - \hat{\tau}_{t-2}^i)}.$$

Vastaisten vanhuuseläkkeiden karttumaa approksimoidaan kaavalla

$$e_t^i = \sum_{j,j' \in J \setminus \{v\}} p_t^{i,j,j'} \delta_t^a e_{t-1}^{j-1} + \phi^i P_t^i (1 - \hat{\tau}_t^i),$$

missä ϕ^i on luokan i TyEL 64 §:n mukainen eläkekarttumaprosentti.

Eläkemenon mallintamisesta on erityisesti huomioitavaa, että toisin kuin lakiesityksessä todetaan [8, s. 4], sijoitustuotot vaikuttavat jossain määrin eläkeoikeuksiin TyEL-maksun kautta pienentämällä eläkkeen perusteena olevaa palkkaa [20, 73 §] ja täydennyskertoimia [20, 97 §, 99 §]. Eläkeoikeuden riippuminen TyEL-maksusta tekee eläkejärjestelmän numeerisesta mallintamisesta erittäin vaikeaa ja esimerkiksi koko järjestelmän eläkkeiden rahoitusongelman matemaattisen optimoinnin käytännössä mahdottomaksi (epäkonvekisuuden vuoksi). Ongelma poistuisi yksinkertaisesti määrittelemällä eläkeoikeus riippuvaksi ainoastaan palkasta ja indekseistä ilman työntekijän TyEL-maksun tasosta riippuvia vähennyksiä, helpottaen olennaisesti eläkemenon numeerista mallintamista ja siten myös eläkejärjestelmän riskinhallintaa.

3 Eläkkeiden rahoitus

Tässä kappaleessa esitetään yksinkertainen malli TyEL-maksun laskentaan. Hallituksen lakiesityksen [8] muutosehdotukset koskevat pääosin rahastoista maksettavien vanhuuseläkkeiden määräytymistä, joten muiden kuin vanhuuseläkemenon rahoitus esitetään yksinkertaisesti vakio-osuutena TyEL-maksusta. Kappaleissa 3.1 ja 3.2 esitetyt mallit rahastoista maksettavalle vanhuuseläkemenolle perustuvat Hillin ja Pennasen [13] esittämään laskentamalliin ja sitä on täydennetty puuttuvilta osin.

TyEL-järjestelmä on osittain rahastoitava. TyEL-lain 12. luvun mukaan työeläkelaitokset keräävät TyEL-maksun kautta eläkkeiden rahastoitavat osat,

sijoittavat ne markkinoille ja maksavat alkaneiden eläkkeiden rahastoidut osat. Loppuosan eläkemenosta maksavat TyEL-järjestelmän piiriin kuuluvat työntekijät ja työnantajat TyEL-maksun tasausosan kautta. Laskuperusteiden [19, s. 7] mukaan TyEL-maksu jakaantuu seitsemään osaan, jotka jakautuvat lisäksi ikä- ja sukupuoliluokittain. Tässä tutkimuksessa keskimääräinen TyEL-maksu τ_t jakautuu

$$\tau_t = \tau_t^\nu + \tau_t^\rho + \tau_t^\epsilon - \tau_t^h,$$

missä τ_t^ν on keskimääräinen TyEL-maksun tasausosan kautta maksettavien vanhuuseläkkeiden osuus, τ_t^ρ keskimääräinen vanhuuseläkkeiden rahastoitava osuus, τ_t^ϵ sisältää TyEL-maksun muut osat ja τ_t^h asiakaspalautusten osuus.

Vuoden t TyEL-maksun tasausosa pyritään asettamaan vastaamaan vuoden t eläkemenoa vähennettynä rahastoista maksetuilla eläkkeillä [8, s. 6], joten vanhuuseläkkeen osuutta tasausosasta approksimoidaan kaavalla

$$\tau_t^\nu = \frac{\bar{F}_t^- - \hat{F}_t^-}{P_t},$$

missä $\hat{F}_t^-$ on rahastoista maksettavien vanhuuseläkkeiden määrä. Kappaleessa 3.1 on esitetty rahastoista maksettavien vanhuuseläkkeiden laskenta nykyisessä ja kappaleessa 3.2 Hallituksen esityksen mukaisessa työeläkejärjestelmässä.

TyEL-maksun osa τ_t^ρ voidaan laskea Hillin ja Pennasen mukaan

$$\tau_t^\rho = \frac{\sum_{i \in I} \kappa_t^i P_t^i}{P_t},$$

missä κ_t^i on luokan i vuoden t eläkemaksun vanhuuseläkeosa, joka määräytyy laskuperusteiden [19] kaavan (11) mukaan sosiaali- ja terveystieteiden vahvistamien kuolevuuslukujen perusteella.

TyEL-maksun osaa τ_t^ϵ approksimoidaan vakiolla 0,06, sillä sijoitustuotot vaikuttavat lähinnä vain vanhuuseläkeliikeen kassavirtojen kautta TyEL-maksuun. ETK:n laskelmassa [2, s. 38] muiden kuin vanhuus- ja lakkautettavan työttömyyseläkkeiden osuus työeläkemaksusta on noin kuusi prosenttia palkkasummasta vuoteen 2020 asti ja vähenee siitä tasaisesti vajaan viiteen prosenttiin vuoteen 2075 mennessä.

TyEL-maksun osa τ_t^h lasketaan

$$\tau_t^h = \frac{h_{t-1}}{P_t},$$

missä h_{t-1} on asiakaspalautusten määrä vuonna $t - 1$. Hallituksen lakiesityksessä on ehdotettu muutoksia asiakaspalautusten määräytymiseen. Kappaleessa 3.3 on esitetty malli asiakaspalautusten laskentaan nykyisessä ja Hallituksen esityksen mukaisessa työeläkejärjestelmässä.

TyEL-maksun maksavat työntekijät -ja antajat yhdessä. Työntekijän osuus TyEL-maksusta lasketaan TyEL 153 §:n mukaan

$$\hat{\tau}_t^i = \begin{cases} 0,03 + 0,5(\tau_t - 0,182) & \text{jos in ikä on alle 53,} \\ \frac{19}{15}\hat{\tau}_t^{52} & \text{muuten.} \end{cases}$$

3.1 Rahastoista maksettavat vanhuuseläkkeet nykyjärjestelmässä

Hillin ja Pennasen [13] esittämän laskentamallin mukaan vuonna t rahastoista maksettavien vanhuuseläkkeiden määrä voidaan laskea

$$\hat{F}_t^- = \sum_{i \in I} K_t^{i,v} \hat{e}_t^i,$$

missä

$$\begin{aligned} \hat{e}_t^i &= \begin{cases} \hat{e}_{t-1}^{i-1} + 0,005 \frac{P_t^i}{\sum_{j \in J} K_t^{i,j}} & \text{jos in ikä on alle 55,} \\ \hat{e}_{t-1}^{i-1} & \text{muuten,} \end{cases} \\ \hat{e}_t^i &= (1 + r_t) \hat{e}_t^i \end{aligned} \quad (1)$$

on luokan $i \in I$ keskimääräinen rahastoitu vanhuuseläke ja r_t TyEL 171 §:n mukainen eläkevastuiden täydennyskerroin. Kokooman [19, s. 5] mukaan täydennyskerroin voidaan laskea

$$r_t = r_t^1 + r_t^2, \quad (2)$$

missä r_t^1 on laskuperustekoron ja r_t^2 vuosille 2003-2013 sovitun lisärahas-
toinnin [21] ja yli 53-vuotialta perittävän korotetun TyEL-maksun mukaan
määräytyvä täydennys vuonna t . Lakiesityksen [8, s. 5] mukaan vastuuv-
elkaa kattaville varoille saatavat sijoitustuotot käytetään kolmen prosent-
in tason ylittävältä osalta laskuperustekorkoon asti vanhuuseläkkeiden rahastoitujen
osien täydennyksiin, joten laskuperustekoron mukaan määräytyvää täyden-
nystä voidaan approksimoida

$$r_t^1 = \frac{(\hat{r}_t - 0,03)L_{t-1}}{\tilde{L}_t}, \quad (3)$$

missä $\hat{r}_t$ on laskuperustekorko, L_{t-1} eläkkeiden rahastoitujen osien vastuuvvelka vuonna $t - 1$ ja $\tilde{L}_t$ vanhuuseläkkeiden rahastoitujen osien vastuuvvelka ennen täydennyksiä vuonna t . Tällöin vastuuvvelan nousu on yhtäsuuri kuin laskuperustekoroon mukainen tuottovaatimus. Vastuuvvelka ja vanhuuseläkkeiden vastuuvvelka ennen täydennyksiä lasketaan Hillin ja Pennasen esittämällä kaavoilla. Laskuperustekorko voidaan lausua niin sanotun Rantalan kaavan [10, s.22] perusteella

$$\hat{r}_t = \max(0, 006 + 0, 2S_{t-1}; 0, 03), \quad (4)$$

missä S_{t-1} on eläkejärjestelmän keskimääräinen vakavaraisuusaste vuonna $t - 1$.

Lisärahastoinnin mukainen täydennys r_t^2 voidaan laskea Hillin ja Pennasen mukaan

$$r_t^2 = \frac{\gamma_t P_t}{\tilde{L}_t}, \quad (5)$$

missä γ_t määrää vuoden t lisärahastoinnin osuuden palkkasummasta.

3.2 Rahastoista maksettavat vanhuuseläkkeet lakiesityksen mukaisessa järjestelmässä

Eläkeneuvotteluryhmän raporttiin [4] pohjautuvassa Hallituksen esityksessä Eduskunnalle [8] esitetään useita muutosehdotuksia työeläkejärjestelmän säännöksiin, joista tässä tarkastellaan vain eläkkeiden rahastoitujen osien laskentaan vaikuttavia ehdotuksia. Tätä kirjoitettaessa virallisia laskuperusteita ei ollut saatavilla.

Lakiesityksen 168 § sisältää uuden osaketuottosidonnainen vastuuvvelan osan L_t^o , jolloin eläkelaitosten vastuuvvelkaa L_t approksimoidaan Hillin ja Pennasen mukaan

$$L_t = \hat{L}_t + \tilde{L}_t + L_t^o + \eta_t,$$

missä $\hat{L}_t$ on rahastoitujen vanhuuseläkkeiden, $\tilde{L}_t$ rahastoitujen tk-eläkkeiden ja η_t muiden rahastoitujen eläkkeiden vastuuvvelka.

Lakiesityksen 171 §:n mukaan vanhuuseläkkeiden täydennykset voitaisiin kohdistaa eri suuruisina eri ikäluokille. Lakiesityksen perusteluissa on esitetty täydennyksien kohdistamista kokonaisuudessaan yli 55 vuotiaiden alkaneisiin ja vastaisiin eläkkeisiin [8, s. 17]. Lakiesityksen 171 §:n mukaan osaketuottosidonnaisen vastuuvvelan ollessa järjestelmätasolla yli 5%:a vastuuvvelasta, ylitykset siirretään rahastoitujen vanhuuseläkkeiden täydennyksiin. Tällöin

kaava (1) korvattaisiin kaavalla

$$\begin{aligned}\check{e}_t^i &= \begin{cases} \check{e}_{t-1}^{i-1} + 0,005 \frac{P_t^i}{\sum_{j \in J} K_t^{i,j}} & \text{jos in ikä on alle 55,} \\ \check{e}_{t-1}^{i-1} & \text{muuten,} \end{cases} \\ \check{e}_t^i &= \begin{cases} \check{e}_t^i & \text{jos in ikä on alle 55,} \\ (1 + r_t) \check{e}_t^i & \text{muuten,} \end{cases} \\ \check{e}_t^i &= \begin{cases} \check{e}_t^i & \text{jos in ikä on alle 55,} \\ \check{e}_t^i (1 + r_t^3) & \text{muuten.} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

missä r_t^3 on osaketuottosidonnaisen vastuuvelan perusteella määräytyvä täydennys.

Lakiesitys sisältää myös muutoksen laskuperustekorona mukaiseen vanhuuseläkkeiden täydennykseen, jonka mukaan 90% vanhuuseläkkeiden täydennyksistä määräytyisi laskuperustekorona perusteella [8, s. 10]. Tällöin kaava (3) korvataan kaavalla

$$r_t^1 = \frac{\max((0, 9\hat{r}_t - 0,03); 0)(L_{t-1} - L_{t-1}^o)}{\check{L}_t^{55}}, \quad (7)$$

missä $\check{L}_t^{55}$ vanhuuseläkkeiden rahastoitujen osien vastuuvelka 55 vuotta täyttäneille ennen täydennyksiä, joka voidaan laskea Hillin ja Pennasen esittämällä kaavalla. Lakiesitys sisältää myös muutoksen laskuperustekorona kaavan parametreihin [8, s. 10], jolloin kaava (4) korvataan kaavalla

$$\hat{r}_t = \max(0, 2S_{t-1}; 0,03).$$

Tässä myös lisärahastoinnin mukainen täydennys r_t^2 kohdistetaan 55 vuotta täyttäneille ja lasketaan kaavan (5) sijaan Hillin ja Pennasen esittämällä kaavalla

$$r_t^2 = \frac{\gamma_t P_t}{\check{L}_t^{55}}.$$

Osaketuottosidonnaisen vastuuvelan mukainen täydennyskerroin voidaan lausua

$$r_t^3 = \frac{\max(-l_t^o; 0)}{\check{L}_t^{55}},$$

missä l_t^o on siirto osaketuottosidonnaisesta vastuuvelasta ja

$$\check{L}_t^{55} = \sum_{i \in I^{55}} \sum_{j \in J} \theta_t^{i,j} K_t^{i,j} \check{e}_t^i$$

on vanhuuseläkkeiden rahastoitujen osien vastuuvelka 55 vuotta täyttäneille ennen osatuottosidonnaisen vastuuvelan mukaisia täydennyksiä. I^{55} on 55 vuotta täyttäneiden ikä- ja sukupuoliluokkien joukko ja parametri $\theta^{i,j}$ on laskettu sosiaali- ja terveysministeriön vahvistamien kuolevuuslukujen perusteella. Siirto riippuu osaketuottosidonnainen vastuuvelan ja varsinaisen vastuuvelan suhteesta. Lakiesityksen perusteluiden [8, s. 17] mukaan osaketuottosidonnaisen vastuuvelan muutos lasketaan kertomalla varsinaisen vastuuvelan kymmenesosaa työeläkelaitosten osakesijoitusten painotetulla keskituottoprosentilla vähennettynä yhdellä prosenttiyksiköllä. Osaketuottosidonnaista vastuuvelkaa approksimoidaan ¹

$$\begin{aligned} L_t^{o'} &= L_{t-1}^o + (0, 9\hat{r}_t + 0, 1(r_t^o - 0, 01))L_{t-1}^o + \\ &\quad (0, 9\hat{r}_t + 0, 1(r_t^o - 0, 01) - \max(0, 9\hat{r}_t; 0, 03))(L_{t-1} - L_{t-1}^o), \end{aligned}$$

missä $L_t^{o'}$ on osaketuottosidonnainen vastuuvelka ennen siirtoja ja r_t^o on työeläkelaitosten osakesijoitusten painotettu keskituotto. Toisin sanoen, koko vastuuvelan L_t katteena olevalle varallisuudelle lasketaan tuottovaatimus $0, 9\hat{r}_t + 0, 1(r_t^o - 0, 01)$, josta osa menee suoraan kaavan (7) mukaisesti vanhuuseläkkeiden täydennyksiin ja loput osaketuottosidonnaiseen vastuuvelkaan kuitenkin siten, että vanhuuseläkkeiden täydennys on aina vähintään 3% lakiesityksen [8, s. 10] mukaisesti. Osaketuottosidonnaisen vastuuvelan ja vastuuvelan suhde saa vaihdella -10%:n ja 5%:n välillä [8, 168 §, 171 §], joten osakesidonnainen vastuuvelka ja siirto voidaan lausua

$$L_t^o = L_t^{o'} + l_t^o,$$

missä

$$l_t^o = \begin{cases} -1, 1L_t^{o'} - 0, 1L_t' & \text{jos } L_t^{o'} < -0, 1L_t' \\ -0, 95L_t^{o'} + 0, 05L_t' & \text{jos } L_t^{o'} > 0, 05L_t' \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Hallituksen lakiesityksen mukainen järjestelmä olisi tarkoitus ottaa käyttöön viiden vuoden siirtymäaikana [8, s. 1], mutta sitä ei huomioida tässä, sillä tarkoitus on vertailla eläkejärjestelmiä.

3.3 Asiakaspalautukset

Työeläkelaitokset voivat jakaa osan varoistaan maksun palautuksina takaisin TyEL-maksun maksajille. Nykyisessä järjestelmässä asiakaspalautusten

¹Antero Ranteen ehdotus

määrä riippuu yhteisömuodon lisäksi toimintapääoman ja vakavaraisuusrajan suhteesta. Asiakaspalautusten määrään voidaan vaikuttaa vakavaraisuusrajaa alentamalla. Tässä raportissa asiakaspalautusten määrää nykyisessä eläkejärjestelmässä approksimoidaan kuitenkin vain keskimääräisestä vakavaraisuusasteesta riippuvalla kaavalla

$$h_t = \begin{cases} \alpha \max(U_t - 0, 12L_t; 0) & \text{jos } U_t - 4V_t - \alpha(U_t - 0, 12L_t) < 0 \\ U_t - 4V_t & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä U_t on eläkelaitoksen toimintapääoma, vakavaraisuusraja V_t lasketaan Sosiaali- ja terveysministeriön asetuksen [16] mukaan ja α määrää maksettavan osuuden. Jatkossa $\alpha = 0,03$ ellei toisin mainita. Asiakaspalautuksina maksetaan siis 3%:a toimintapääomasta vakavaraisuusasteen 12%:a ylittävältä osalta. Lisäksi palautuksina maksetaan toimintapääoman neljän kertaa vakavaraisuusrajan ylittävä osa kuten nykyäänökset edellyttävät [4, s. 59].

Eläkeneuvotteluryhmä ehdottaa, että työeläkeyhtiöillä asiakaspalautusten sallittu enimmäismäärä olisi vakavaraisuusrajasta riippumaton [4, s. 56]. Lisäksi eläkeneuvotteluryhmä ehdottaa, että toimintapääoman ja vakavaraisuusrajan suhteen ylityksen mukaiset palautukset tehtäisiin vasta ylityksen jatkuessa pidempään kuin yhden vuoden ja että palautukset jaettaisiin useammalle vuodelle [4, s. 59]. Lakiesityksen 18 §:n mukaista asiakaspalautusten määrää approksimoidaan keskimääräisestä vakavaraisuusasteesta riippuvalla kaavalla

$$h_t = \begin{cases} \alpha \max(U_t - 0, 15L_t; 0) & \text{jos } U_{t-1} - 4V_{t-1} < 0 \text{ tai} \\ & U_t - 4V_t - \alpha(U_t - 0, 15L_t) < 0 \\ \frac{1}{3}(U_t - 4V_t) & \text{muuten,} \end{cases} \quad (8)$$

missä vakavaraisuusraja V_t lasketaan Hallituksen lakiesityksen [9] 10 §:n mukaan. Palautuksina maksetaan siis 3%:a toimintapääomasta vakavaraisuusasteen 15%:a ylittävältä osalta. Lisäksi vakavaraisuusrajan mukaisten ylitysten palautuksina maksetaan kolmasosa toimintapääoman neljän kertaa vakavaraisuusrajan ylittävä osa mikäli toimintapääoma on yli neljä kertaa suurempi kuin vakavaraisuusraja vähintään toista vuotta peräkkäin.

Nykyjärjestelmässä maksetaan palautuksia vakavaraisuusasteen 12%:a ylittävältä osalta ja lakiesityksen mukaisessa järjestelmässä 15%:a ylittävältä osalta, koska valittujen vakavaraisuusasteiden kohdalla laskuperustekorko alkaa kasvaa asianomaisissa järjestelmissä. Palautuksia ei siis makseta ellei samalla tehdä vakavaraisuusasteen perusteella täydennyksiä rahastoituihin vanhuuseläkkeisiin. Asiakaspalautusten virallista kaavaa ei ollut määriteltä tätä kirjoitettaessa. Hallituksen lakiesityksen [8, 18 §] mukaan työeläkeyhtiöt voisivat maksaa asiakaspalautuksia vakavaraisuusrajalle asti, mutta tätä

kirjoitettaessa oli epäselvää, ovatko työeläkeyhtiöiden asiakassiirrot vapaaehtoisia kuten nykyisin vaiko pakollisia.

4 Vakavaraisuus

Työeläkelaitosten sijoitustoimintaa koskevat monet säännökset, joiden noudattamista valvoo Vakuutusvalvontavirasto [15, 2 §]. Työeläkelaitoksen on katettava aktuaarisesti määritelty vastuuvilkansa sijoituksillaan. Työeläkelaitosten keskimääräinen vakavaraisuusaste lasketaan kaavalla

$$S_t = \frac{U_t}{L_t},$$

missä

$$U_t = w_t - L_t,$$

on toimintapääoma ja w_t on eläkelaitoksen sijoitusten arvo.

Eläkeneuvotteluryhmä esittää muutoksia työeläkelaitosten konkurssirajaan, joka on nykyisin käytännössä kolmasosa vakavaraisuusraja [4, s. 61]. Tässä raportissa käytetään kahta konkurssirajaa. Ensimmäisessä eläkelaitos on konkurssissa mikäli sen toimintapääoma on alle kolmasosan vakavaraisuusraja vähintään kerran tarkasteluhorisontin aikana. Vakavaraisuusraja lasketaan nykyisessä järjestelmässä asetuksen [16] ja uudessa järjestelmässä lakiesityksen [9] 10 §:n kaavan ja parametrien mukaan. Vakavaraisuusrajaan perustuva konkurssitodennäköisyys lasketaan kaavalla

$$P(B^{\frac{1}{3}}) = P(U_t < \frac{1}{3}V_t \text{ vähintään kerran laskentahorisontin aikana}).$$

Toisessa konkurssimääritelmässä eläkelaitos on konkurssissa, mikäli sen toimintapääoma on negatiivinen vähintään kerran tarkasteluhorisontin aikana. Konkurssitodennäköisyys lasketaan kaavalla

$$P(B^0) = P(U_t < 0 \text{ vähintään kerran laskentahorisontin aikana}).$$

Laskelmissa eläkelaitos jatkaa toimintaansa konkurssista huolimatta.

5 Sijoitusstrategiat

Työeläkelaitosten sijoitusmahdollisuuksia approksimoidaan seitsemällä sijoitusluokalla: lyhyen ja pitkän koron sijoituksilla, suomalaisten, eurooppalaisten, amerikkalaisten ja aasialaisten osakkeiden sekä suomalaisten kiinteistöjen kokonaistuottoindeksillä. Merkitään vastaavaa sijoitusmahdollisuuksien joukkoa $A = \{si, bi, fi, eu, us, as, pi\}$.

Työeläkelaitosten sijoitusstrategiat vaikuttavat huomattavasti niiden saamiin sijoitustuottoihin. Tässä raportissa sijoitustoimintaa approksimoidaan kahdentyyppisillä sijoitusstrategioilla. Pitkän aikavälin sijoitussuunnittelussa ja tutkimuksessa käytetyin sijoitusstrategia on luultavasti kiinteän sijoitusallokaation strategia (Fixed-Mix, FM), jossa sijoitusallokaatiot päivitetään määrääjain kiinteisiin sijoitusosuuksiin koko portfolion arvosta. Usein on kuitenkin löydettävissä parempia sijoitusstrategioita kuin staattinen kiinteän sijoitusallokaation strategia; katso esimerkiksi [7, 12]. Toisena sijoitusstrategiana käytetään Blackin ja Jonesin [3] sekä Peroldin ja Sharpen [18] esittämää päätössääntöä, jossa riskillisten sijoitusten suhteellista osuutta koko portfolion arvosta kasvatetaan järjestelmän keskimääräisen vakavaraisuusasteen kasvaessa ja päinvastoin (Dynamic Portfolio Insurance, DPI). Tämän tutkimuksen dynaamisissa sijoitusstrategioissa lyhyeen korkoon ja kiinteisiin sijoitetaan aina kiinteä osuus portfolion arvosta kuten kiinteän sijoitusallokaation strategiassa. Kaikkiin osakkeisiin sijoitetaan suhteessa yhtä paljon, jolloin niiden osuus portfoliosta voidaan lausua

$$w_t^j = \frac{\max(b^l; \min(b^u; \lambda S_t))}{4} \quad \forall j \in \{fi, eu, us, as\},$$

toisin sanoen kaikkiin osakkeisiin sijoitetaan suhteessa yhtä paljon ja osakkeiden yhteenlaskettu paino salkussa vaihtelee alarajan b^l ja ylärajan b^u välillä riippuen järjestelmän keskimääräisestä vakavaraisuusasteesta ja parametrista λ . Pitkän koron sijoitusten osuus voidaan tällöin lausua

$$w_t^{bi} = 100 - \sum_{j \in A \setminus \{bi\}} w_t^j.$$

Tässä tutkimuksessa sijoitusportfolio päivitetään kerran vuodessa kaikissa sijoitusstrategioissa.

Sijoitustuottojen sekä ansiotaso- ja elinkustannusindeksien stokastiikka kuvataan Hilli et al. [11] esittämällä aikasarjamallilla. Se on pääpiirteissään samankaltainen kuin Koivu et al. [14] esittämä stokastinen malli työeläkelaitoksille, mutta Hilli et al. mallissa on useampi osakesijoitusluokka sekä eläkemenon laskennassa tarvittava elinkustannusindeksi. Stokastiikan malli poikkeaa olennaisesti eläkeneuvotteluryhmän laskelmissa käytetystä, jossa eri sijoitusluokkien stokastiikka on mallinnettu toisistaan riippumattomilla malleilla. Eläkeneuvotteluryhmän laskelmissa käytetty sijoitustuottomalli on kuvattu Heikkilän SHV-työssä [10] [4, s. 82]. Hilli et al. esittämässä aikasarjamallissa stokastiikka kuvataan perustuen Nobel-palkittujen Englen ja Grangerin [6] yhteisintegroituvuusmalliin. Mallilla voidaan kuvata stokastisten tekijöiden pitkän aikavälin relaatioita, kuten esimerkiksi korkojen keskiarvohakuisuutta, osakkeiden pitkän aikavälin odotettuja tuottoja, inflaation pitkän

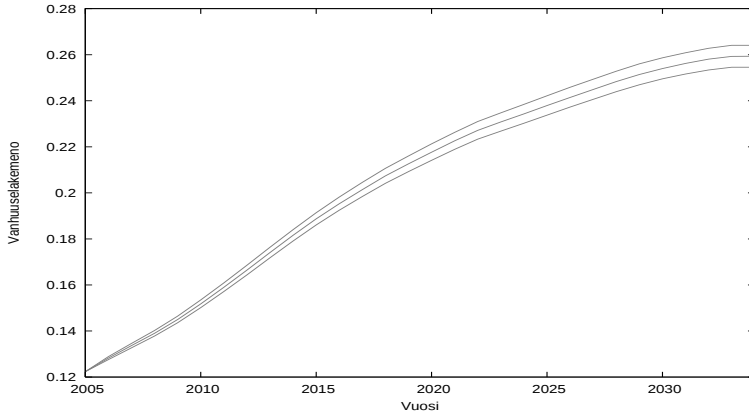
aikavälin odotusarvoa ja niin edelleen. Malliin on myös lisätty asiantuntijainformaatiota Koivu et al. esittämällä tavalla. Mallissa tuotot ovat lognormaalisesti jakautuneita kun taas eläkeneuvotteluryhmän laskelmissa tuotot ovat normaalijakautuneita [4, s. 83]. Normaalijakaumaoletuksesta seuraa, että ilman lisärajoitteita osakeindeksit tai korot voisivat saada negatiivisia arvoja. Lisärajoitteista saattaa seurata esimerkiksi positiivisen todennäköisyysmassan kerääntyminen poikkeaviin pisteisiin.

6 Tulokset

Edellä kuvatulla mallilla simuloitiin yksityisen sektorin vanhuuseläkemenoa sekä sen rahoitusta vuosille 2005-2034 olettaen, että kaikki varat olisi sijoitettu yhteen työeläkeyhtiöön. Simuloinneissa käytettiin ETK:n [2] determinististä väestömallia sillä erotuksella, että laskennan yksinkertaistamiseksi kaikkien oletetaan jäävän vanhuuseläkkeelle 65 vuotiaina lukuunottamatta työkyvyttömyyseläkeläisiä, jotka jäävät vanhuuseläkkeelle 63 vuotiaina. Väestö- ja tilamallit sekä niihin liittyvä epävarmuus vaikuttavat tuloksiin pitkällä aikavälillä [2, s. 49] [17], mutta tähän tutkimukseen soveltuvaa stokastista väestötai tilamallia ei ole saatavilla (katso esim. [1] ja sen viitteet).

Alkaneiden ja vastaisten vanhuuseläkkeiden karttumat E^i ja e^i saatiin ETK:sta. Rahastoista maksettava vanhuuseläkemeno sekä rahastoitujen osien eläkevastuu laskettiin Hillin ja Pennasen [13] esittämällä mallilla ja vastaavilla ETK:n lähtötiedoilla. Kuvassa 1 on esitetty 90%-luottamusväli ja mediaani vanhuuseläkemenolle suhteessa palkkasummaan vuosille 2005-2034 kun käytetään myöhemmin määriteltävää sijoitusstrategiaa FM^1 . Sijoitusstrategian vaikutus eläkemenoon tarkastellulla aikavälillä on pieni.

Sijoitusportfolion alkuarvona w_{2005} käytettiin vuoden 2004 lopun yksityisen sektorin työeläkelaitosten sijoitusvarallisuutta, 64,1 miljardia € (<http://www.tela.fi>). Lähtöhetken vakavaraisuusaste on 22,8%:a, mikä on 1,8%:a korkeampi kuin eläkeneuvotteluryhmän laskelmissa käyttämä lähtöarvo [4, s. 83]. Sijoitusstrategiana FM^1 käytetään kiinteän sijoitusallokaation strategiaa, jossa on käytetty taulukon 1 mukaisia sijoitusosuuksia. Lyhyen koron ja kiinteistöjen sijoitusosuudet vastaavat eläkeneuvotteluryhmän [4, s. 82] laskelmissa käyttämiä osuuksia. Myös osakkeiden yhteenlaskettu osuus vastaa eläkeneuvotteluryhmän [4, s. 84] peruslaskelmassa käyttämiä osuuksia, olettaen että osakesijoitusten osuudet ovat yhtäsuuria. Jäljelle jäävä varallisuus sijoitetaan pitkään korkoon. Sijoitusstrategiana DPI^1 käytetään dynaamista sijoitusstrategiaa, joka määrittyy taulukon 2 parametrien mukaan. Tällöin osakkeiden osuus vaihtelee välillä 10%-35% ja pitkän koron sijoitusosuus välillä 44%-69% riippuen järjestelmän keskimääräisestä vakavaraisuusasteesta.



Kuva 1: Mediaani ja 90%-luottamusväli TyEL-vanhuuseläkemenolle suhteessa palkkasummaan.

Taulukko 1: Sijoitusstrategian FM^1 sijoitusosuudet.

Lyhyt korko	$w_t^{si} = 8\%$,
pitkä korko	$w_t^{bi} = 59\%$,
suomalaiset osakkeet	$w_t^{fi} = 5\%$,
eurooppalaiset osakkeet	$w_t^{eu} = 5\%$,
amerikkalaiset osakkeet	$w_t^{us} = 5\%$,
aasialaiset osakkeet	$w_t^{as} = 5\%$,
kiinteistöt	$w_t^{pi} = 13\%$.

Koska $\lambda = 1$ niin osakesijoitusten osuus on täsmälleen yhtäsuuri kuin vakavaraisuusaste. Eläkeneuvotteluryhmän mukaan osakesijoitusten osuus on ollut viime vuosina lievästi suurempi kuin vakavaraisuusaste [4, s. 33].

6.1 Nykyjärjestelmä

Kuvassa 2 on esitetty TyEL-maksun mediaani ja 90% luottamusväli vuosille 2005-2034 molemmille sijoitusstrategioille. Vuosien 2003-2013 lisärahastointi [21] oletetaan tehtävän nostamalla TyEL-maksua, mikä näkyy selvänä maksun nousuna vuoteen 2013 asti. TyEL-maksun jakauma on vino ja hajonta huomattavan suurta, joten pelkkä odotusarvon ja hajonnan tarkastelu ei an-

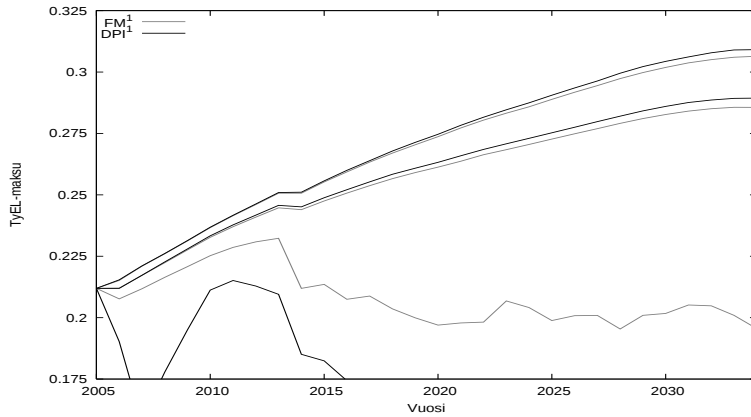
Taulukko 2: Sijoitusstrategian DPI^1 parametrit.

Lyhyt korko	$w_t^{si} = 8\%$,
kiinteistöt	$w_t^{pi} = 13\%$,
osakkeiden minimiosuus	$b^l = 10\%$,
osakkeiden maksimiosuus	$b^u = 35\%$,
riskiparametri	$\lambda = 1,0$.

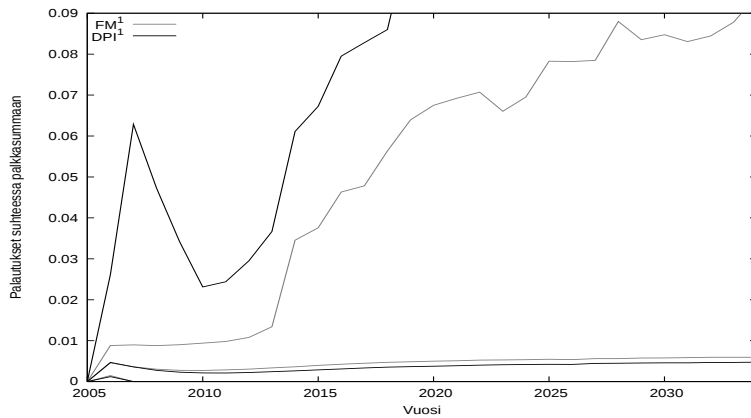
na riittävää kuvaa TyEL-maksun kehityksestä. TyEL-maksun mediaani on lievästi korkeampi kuin TyEL-maksu ETK:n deterministisessä laskelmassa, jossa maksu on 23,6%:a vuonna 2015 ja 27,7%:a palkkasummasta vuonna 2035 [2, s.74],[4, s. 19-20]. Tässä TyEL-maksun mediaani on 24,8%:a vuonna 2015 ja 28,6%:a palkkasummasta vuonna 2034 sijoitusstrategialla FM^1 . Vastaavat TyEL-maksun keskiarvot ovat 24,2%:a vuonna 2015 ja 27,5%:a vuonna 2034. Staattisella strategialla FM^1 TyEL-maksun luottamusvälin alaraja on selkeästi heikompi kuin dynaamisella strategialla DPI^1 , jossa osakkeiden paino kasvaa vakavaraisuusasteen kasvaessa. TyEL-maksu laskee huomattavan matalaksi lähinnä poikkeuksellisen suurten maksun palautusten takia, joita on myös eläkeneuvotteluryhmän laskelmissa. Alaraja on 5%-kvantiili kullekin vuodelle 2005-2034, ei yksittäinen simulaatio jossa TyEL-maksu kehittyisi alarajan mukaisesti. Mediaanissa ei juurikaan ole eroa sijoitusstrategioiden välillä. Luottamusvälin yläraja (95%-kvantiili) on lievästi alempi dynaamisen strategian siirtäessä varoja pois osakkeista vakavaraisuusasteen laskiessa.

Kuvassa 3 on esitetty mediaani ja 90% luottamusväli palautuksille suhteessa palkkasummaan molemmille sijoitusstrategioille. Nykyinen käytäntö johtaa pienellä todennäköisyydellä huomattavan suuriin palautuksiin, koska toimintapääoman ollessa yli neljä kertaa suurempi kuin vakavaraisuusraja, koko ylitys palautetaan maksun alennuksina välittömästi. Sama ilmiö on myös eläkeneuvotteluryhmän laskelmissa, jossa tuli keskimäärin yli 5% palkkasumman suuruisia palautuksia noin kerran 5-10 vuodessa [4, s. 59] [8, s. 15].

Kuvassa 4 on esitetty vastaavasti järjestelmän keskimääräisen vakavaraisuusasteen mediaani ja 90% luottamusväli. Strategialla FM^1 vakavaraisuusasteen luottamusvälin alaraja on ajanhetkestä riippuen noin 0,5-1%:a heikompi kuin dynaamisella strategialla DPI^1 , toisin sanoen lievästi alempi TyEL-maksun yläraja saadaan lievästi alemman vakavaraisuusasteen alarajan kustannuksella. Mediaani noin 1-2%:a korkeampi strategialla FM^1 kuin strategialla DPI^1 , koska dynaaminen strategia DPI^1 muuttaa osakesijoitus-



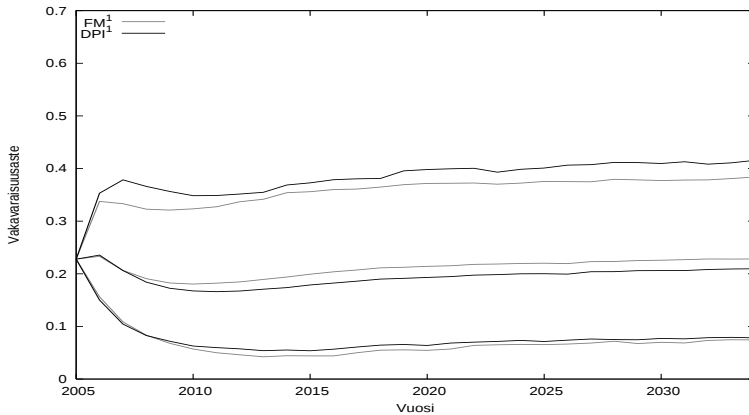
Kuva 2: Mediaani ja 90%-luottamusväli TyEL-maksulle.



Kuva 3: Mediaani ja 90%-luottamusväli palautuksille.

ten osuutta vakavaraisuusasteen mukaan. Luottamusvälin yläraja määräytyy suuressa määrin sijoitusstrategiasta riippuvan vakavaraisuusrajan mukaan, joten strategialla DPI^1 päästään hieman korkeampaan vakavaraisuusasteeseen kuin strategialla FM^1 .

Kuvassa 5 on esitetty mediaani ja 90%:n luottamusväli järjestelmän rahastoitujen osien vastuuvälille suhteessa palkkasummaan. Mediaani (vuonna 2034 noin 1,8 sijoitusstrategiasta riippuen) on samansuuntainen kuin ETK:n



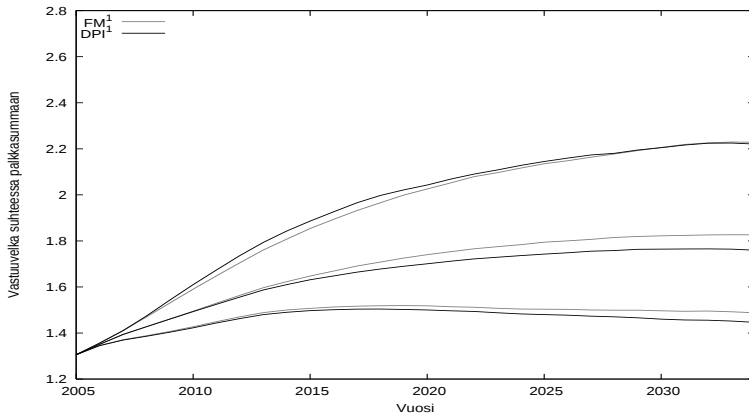
Kuva 4: Mediaani ja 90%-luottamusväli TyEL-järjestelmän keskimääräiselle vakavaraisuusasteelle.

deterministisessä laskelmassa, jossa vuoden 2035 vastuuvélka suhteessa palkkasummaan on 1,9 [2, s. 74]. Mediaani ja luottamusvälin alaraja ovat lievästi suuremmat staattisella strategialla FM^1 kuin strategialla DPI^1 , koska dynaamisen strategian tuotot pienenevät osakkeiden osuuden pienentyessä vakavaraisuusasteen laskiessa. Ylärajassa eroa ei juurikaan synny dynaamisen strategian lisätessä osakesijoitusten osuutta vakavaraisuusasteen kasvaessa.

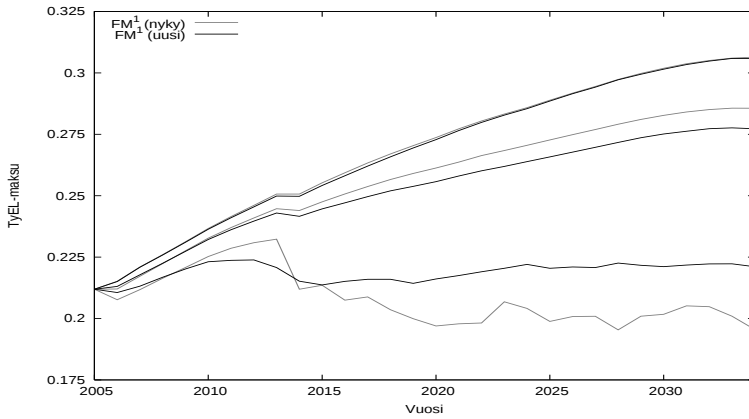
6.2 Hallituksen lakiesitys

Kuvassa 6 on esitetty TyEL-maksun mediaani ja 90% luottamusväli nykyjärjestelmän (*nyky*) ja Hallituksen esityksen mukaisessa järjestelmässä (*uusi*) kun käytetään sijoitusstrategiaa FM^1 . TyEL-maksun luottamusvälin ylärajaan ei juurikaan vaikuta. TyEL-maksun mediaani uudessa järjestelmässä on ajanhetkestä riippuen noin 0-0,8%:a alempi kuin nykyjärjestelmässä. Sen sijaan TyEL-maksun luottamusvälin alaraja on ajanhetkestä riippuen noin 0% - 3%:a alempi nykyjärjestelmässä kuin uudessa järjestelmässä. Uudessa järjestelmässä toimintapääoman ollessa yli neljää kertaa suurempi kuin vakavaraisuusraja, ylitykset jaksotetaan useammalle vuodelle kun taas nykyjärjestelmässä ylitykset maksetaan kerralla pois.

Kuvassa 7 on esitetty TyEL-maksun mediaani ja 90% luottamusvälit nykyjärjestelmän ja Hallituksen esityksen mukaisessa järjestelmässä sijoitusstrategialle DPI^1 . TyEL-maksun luottamusvälin ja medianin suhteen muutokset ovat lievästi suurempia kuin staattisella sijoitusstrategialla FM^1 , kos-



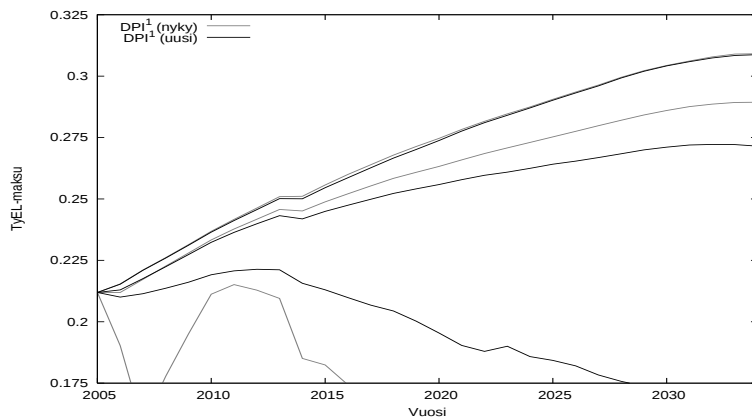
Kuva 5: Mediaani ja 90%-luottamusväli TyEL-järjestelmän vastuuvallalle suhteessa palkkasummaan.



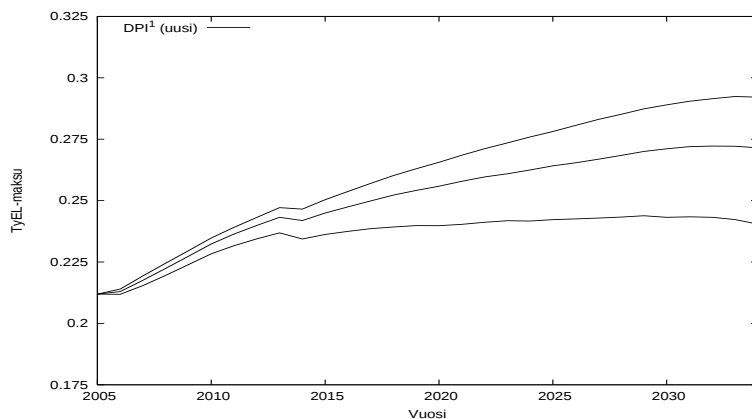
Kuva 6: Mediaani ja 90%-luottamusvälit eläkejärjestelmien TyEL-maksulle sijoitusstrategialla FM^1 .

ka dynaaminen strategia reagoi muuttuneeseen toimintapääoman määrään. Mediaani on ajanhetkestä riippuen 0-1,8%:a alempi uudessa kuin nykyisessä järjestelmässä. Tässä saatu TyEL-maksun vaihteluväli on huomattavasti suurempi kuin lakiesityksen yleisperusteluissa esitetty TyEL-maksun herkkyyssanalyysin mukainen vaihteluväli 25,5-28% [8, s. 9]. Herkkyyssanalyysin

vaihteluväli on vähän pienempi kuin 50%-luottamusväli, joka on esitetty kuvassa 8. Herkkyysanalyysissä ei ole huomioitu sijoitustuottojen stokastiikkaa.



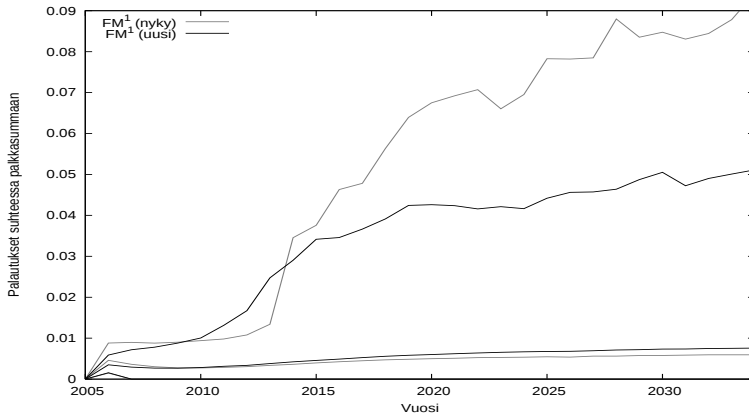
Kuva 7: Mediaani ja 90%-luottamusvälit eläkejärjestelmien TyEL-maksulle sijoitusstrategialla DPI^1 .



Kuva 8: Mediaani ja 50%-luottamusväli uuden eläkejärjestelmän TyEL-maksulle sijoitusstrategialla DPI^1 .

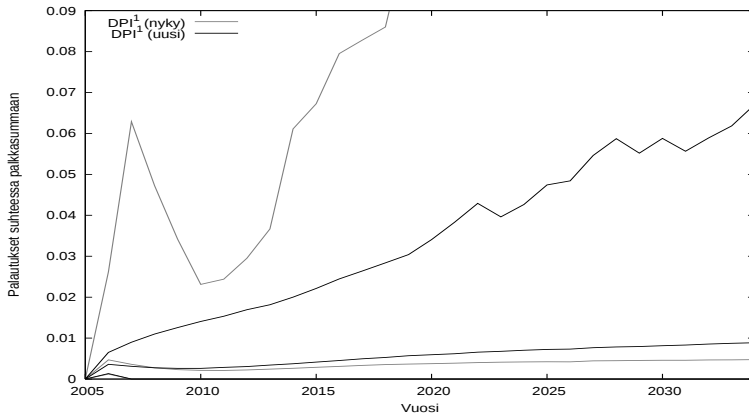
Kuvissa 9 ja 10 on esitetty mediaani ja 90% luottamusväli palautuksil-

le suhteessa palkkasummaan molemmissa järjestelmissä. Uudessa järjestelmässä huomattavan suurten palautusten määrä vähenee, mutta ne voivat olla pienellä todennäköisyydellä varsin suuria edelleenkin. Kuten myöhemmin nähdään, uudessa järjestelmässä toimintapääoman määrä vaihtelee enemmän kuin vanhassa järjestelmässä, erityisesti kun osakkeiden sijoitusosuutta kasvatetaan. Vastaavasti esimerkiksi laskuperustekorkoa ei voida nostaa kuin korkeintaan yhden prosentin vuodessa [4, s. 99], jolloin tuotot eivät välttämättä ohjaudu kovinkaan nopeasti rahastojen täydennyksiin vaan maksetaan asiakaspalautuksina takaisin. Ongelmana on myös ylärajan riippuminen vakavaraisuusraja, jota voidaan muuttaa sijoitusstrategialla suurten palautusten maksamiseksi.



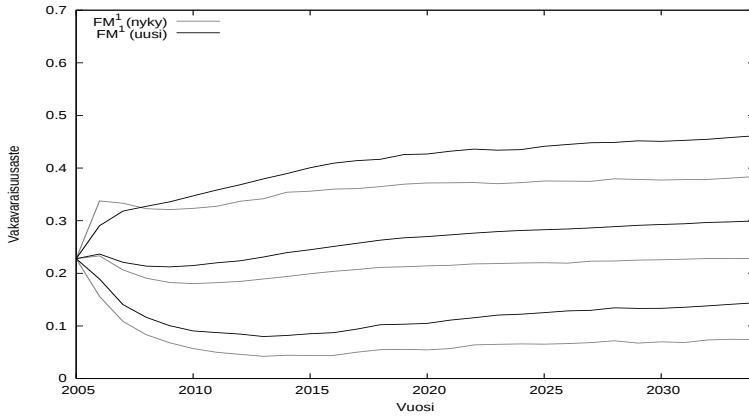
Kuva 9: Mediaani ja 90%-luottamusväli palautuksille sijoitusstrategialla FM^1 .

Kuvassa 11 on esitetty molempien järjestelmien vakavaraisuusasteen mediaanit ja 90% luottamusvälit kun käytetään sijoitusstrategiaa FM^1 . Ero nykyisen ja uuden järjestelmän välillä on huomattava, ajanhetkestä riippuen vakavaraisuusaste on 3-5%:a korkeampi uudessa kuin nykyisessä järjestelmässä osaketuottosidonnaisen vastuuvelan osan ja muuttuneen tuottovaatimuksen vaikuttaessa vastuuvelan määrään. Kuvassa 12 on molempien järjestelmien keskimääräisen vakavaraisuusasteen mediaanit ja 90% luottamusvälit kun käytetään sijoitusstrategiaa DPI^1 ja tulokset ovat samansuuntaisia kuin sijoitusstrategialla FM^1 . Yläraja on kuitenkin huomattavasti vielä korkeammalla, koska vakavaraisuusraja nousee osakesijoitusten kasvaessa ja vakavaraisuusrajan nelinkertaisia ylityksiä ei tarvitse maksaa välittömästi asiakaspalautuksina. Vakavaraisuusasteen kasvu oli yksi eläkeuudistuksen tavoitteis-

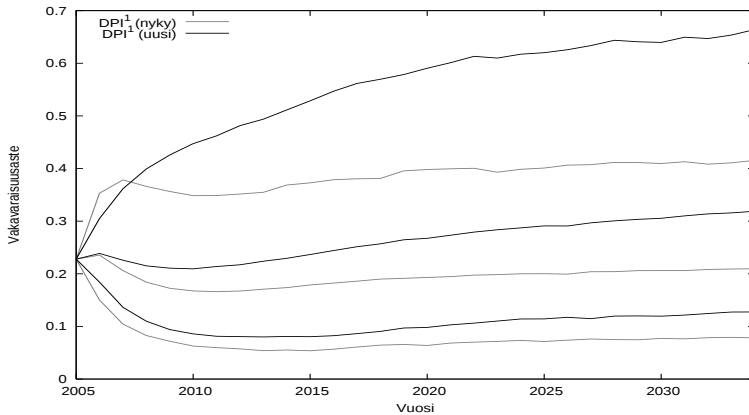


Kuva 10: Mediaani ja 90%-luottamusväli palautuksille sijoitusstrategialla DPI^1 .

ta [8, s. 12], mutta pitkällä aikavälillä nousu on suurempi kuin lakiesityksen esittämä 2%:n kasvu viidessä vuodessa. Kasvu riippuu kuitenkin huomattavasti sijoitusstrategiasta. Vakavaraisuusasteen jakauma on myös hyvin vino, joten pelkkä odotusarvon tarkastelu ei ole riittävää.



Kuva 11: Mediaani ja 90%-luottamusvälit eläkejärjestelmien vakavaraisuusasteelle sijoitusstrategialla FM^1 .

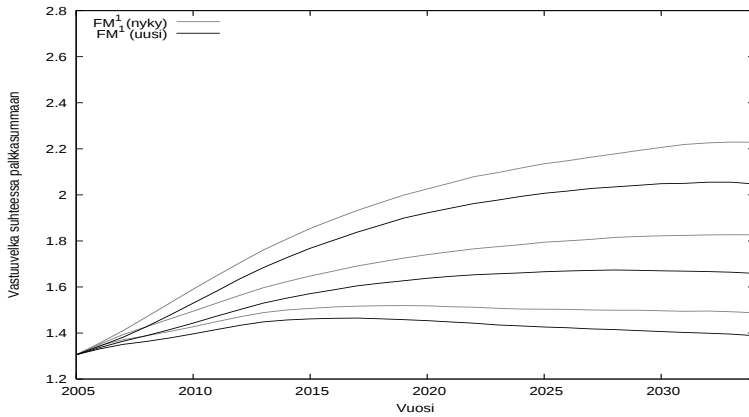


Kuva 12: Mediaani ja 90%-luottamusvälit eläkejärjestelmien vakavaraisuusasteelle sijoitusstrategialla DPI^1 .

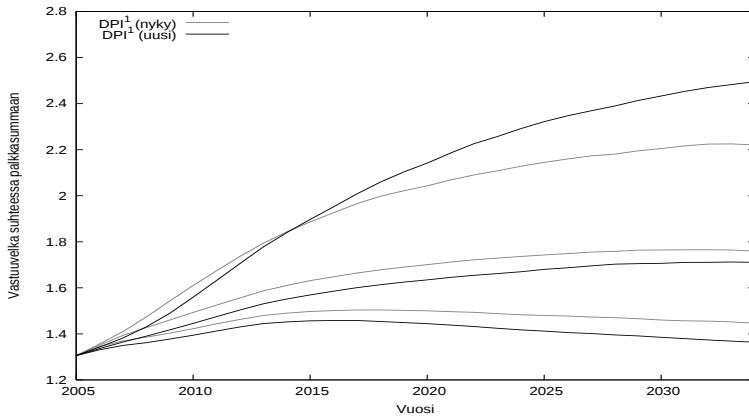
Kuvassa 13 on esitetty molempien järjestelmien rahastoitujen eläkkeiden vastuuvelan (L_t nykyisessä ja $L_t - L_t^o$ uudessa järjestelmässä) mediaanit ja 90% luottamusvälit kun käytetään sijoitusstrategiaa FM^1 . Uudessa järjestelmässä eläkkeiden rahastoituja osia täydennetään hitaammin, koska osa tuotoista on siirretty osaketuottosidonnaiseen vastuuvelkaan. Mikäli eläkelaitos käyttää kiinteän sijoitusallokaation strategiaa eikä muuta strategiaansa, eläkelaitos maksaa uudessa järjestelmässä vähemmän vanhuuseläkkeitä rahastoitujen osien kautta kuin nykyisessä järjestelmässä tarkastellulla aikavälillä. Kuvassa 14 on esitetty molempien järjestelmien rahastoitujen eläkkeiden vastuuvelan mediaanit ja 90% luottamusvälit kun käytetään sijoitusstrategiaa DPI^1 . Dynaaminen strategia lisää osakesijoitusten osuutta vakavaraisuusasteen kasvaessa, mikä näkyy uudessa järjestelmässä korkeampina eläkkeiden rahastoitujen osien täydennyksinä hyvien sijoitustuottojen tapauksessa.

6.3 Hallituksen lakiesitys suuremmilla osakepainoilla

Kappaleissa 6.1 ja 6.2 on tarkasteltu nykyistä ja Hallituksen esityksen mukaista järjestelmää käyttäen samoja sijoitusstrategioita. Yksi lakiesityksen tavoitteista on lisätä osakesijoitusten osuutta sijoitusportfoliossa. Esityksen mukaan sijoitusosuutta voitaisiin nostaa nykyisestä noin 10%:a seuraavan viiden vuoden kuluessa [8, s. 9], *nykyistä* ei esityksessä ole määriteltä. Määritellään kiinteän sijoitusallokaation sijoitusstrategia FM^2 taulukon 3 parametrien mukaan, missä osakesijoitusten yhteenlaskettua osuutta on lisätty



Kuva 13: Mediaani ja 90%-luottamusvälit järjestelmien rahastoitujen eläkkeiden vastuuvelalle suhteessa palkkasummaan sijoitusstrategialla FM^1 .



Kuva 14: Mediaani ja 90%-luottamusvälit järjestelmien rahastoitujen eläkkeiden vastuuvelalle suhteessa palkkasummaan sijoitusstrategialla DPI^1 .

10%:lla strategiaan FM^1 verrattuna ja vastaavasti vähennetty pitkän koron sijoitusten osuutta 10%:a. Määritellään vastaavasti enemmän osakkeisiin sijoittava dynaaminen sijoitusstrategia DPI^2 taulukon 4 mukaan, jossa parametria λ on kasvatettu siten, että osakkeisiin sijoitetaan 1,2 kertaa vakavaraisuusaste annettujen rajojen sisällä.

Taulukko 3: Sijoitusstrategian FM^2 sijoitusosuudet.

Lyhyt korko	$w_t^{si} = 8\%$,
pitkä korko	$w_t^{bi} = 49\%$,
suomalaiset osakkeet	$w_t^{fi} = 7,5\%$,
eurooppalaiset osakkeet	$w_t^{eu} = 7,5\%$,
amerikkalaiset osakkeet	$w_t^{us} = 7,5\%$,
aasialaiset osakkeet	$w_t^{as} = 7,5\%$,
kiinteistöt	$w_t^{pi} = 13\%$.

Taulukko 4: Sijoitusstrategian DPI^2 parametrit.

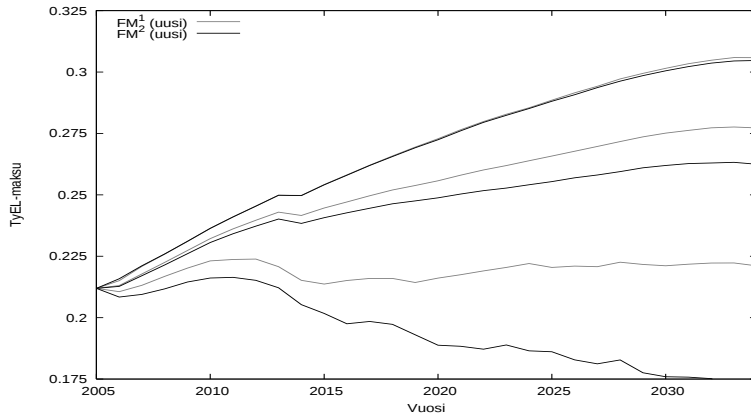
Lyhyt korko	$w_t^{si} = 8\%$,
kiinteistöt	$w_t^{pi} = 13\%$,
osakkeiden minimiosuus	$b^l = 10\%$,
osakkeiden maksimiosuus	$b^u = 35\%$,
riskiparametri	$\lambda = 1,2$.

Kuvassa 15 on esitetty mediaani ja 90%-luottamusvälit uuden eläkejärjestelmän TyEL-maksulle sijoitusstrategioilla FM^1 ja FM^2 . Luottamusvälin ylärajaan osakkeiden osuuden lisäys ei juurikaan vaikuta, mutta TyEL-maksun mediaani putoaa ajanhetkestä riippuen 0-1,5%:a. Nykyjärjestelmän TyEL-maksuun strategialla FM^1 (kuva 2) mediaanin ero on 0-2,3%:a ajanhetkestä riippuen. Luottamusvälin alarajaan muutos vaikuttaa huomattavasti hyvien sijoitustuottojen johtaessa ajoittain suuriin asiakaspalautuksiin.

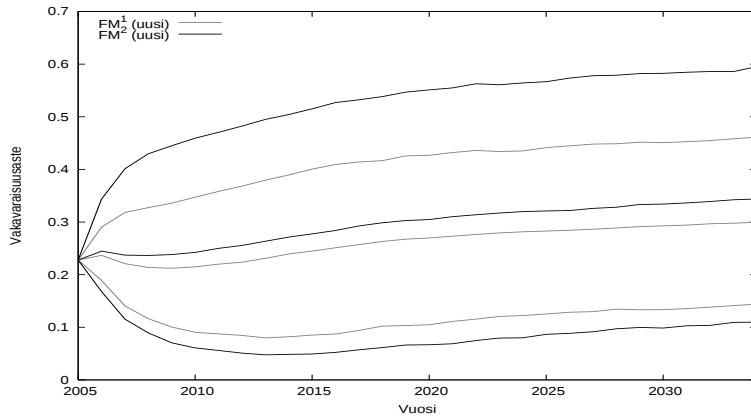
Kuvassa 16 on esitetty mediaani ja 90%-luottamusvälit uuden eläkejärjestelmän vakavaraisuusasteelle sijoitusstrategialla FM^2 . Luottamusvälit ovat huomattavasti suuremmat osakepainotteisemmalla sijoitusstrategialla FM^2 , matalammat TyEL-maksut saavutetaan siis suuremmalla riskillä.

Kuvassa 17 on esitetty mediaani ja 90%-luottamusvälit uuden järjestelmän rahastoitujen eläkkeiden vastuuvälille suhteessa palkkasummaan sijoitusstrategioilla FM^1 ja FM^2 , erot sijoitusstrategioiden välillä ovat samansuuntaiset kuin TyEL-maksussa. Luottamusvälin alarajasta nähdään, että heikkojen sijoitustuottojen tapauksessa rahastot eivät juurikaan kasva eikä eroa synny, sijoitustuottojen parantuessa myös rahastot kasvavat selvästi nopeammin suuremmalla osakepainolla.

Kuvissa 18 - 20 on esitetty mediaanit ja 90%-luottamusvälit järjestel-

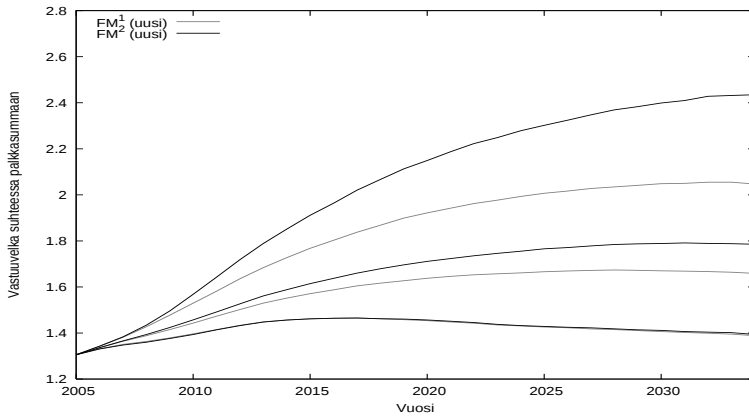


Kuva 15: Mediaani ja 90%-luottamusvälit uuden eläkejärjestelmän TyEL-maksulle sijoitusstrategioilla FM^1 ja FM^2 .



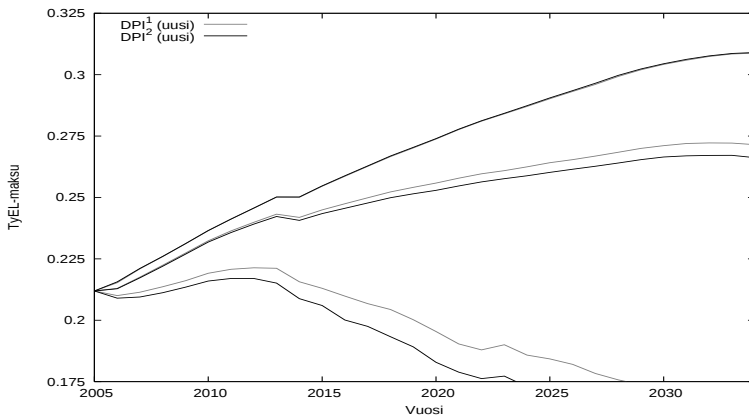
Kuva 16: Mediaani ja 90%-luottamusvälit uuden eläkejärjestelmän vakavaraisuusasteelle sijoitusstrategioilla FM^1 ja FM^2 .

mien TyEL-maksulle, vakavaraisuusasteelle ja rahastoitujen eläkkeiden vastuvelalle suhteessa palkkasummaan sijoitusstrategialla DPI^1 ja DPI^2 . Dynaamisella sijoitusstrategialla erot järjestelmien välillä ovat huomattavasti pienemmät kuin kiinteän sijoitusallokaation strategioilla, koska dynaamiset strategiat reagoivat muutenkin suoraan vakavaraisuusasteen kasvuun. TyEL-

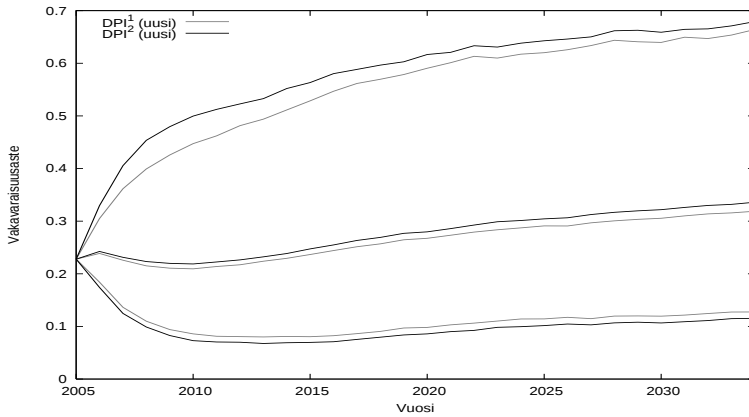


Kuva 17: Mediaani ja 90%-luottamusvälit uuden järjestelmän vastuvelle suhteessa palkkasummaan sijoitusstrategioilla FM^1 ja FM^2 .

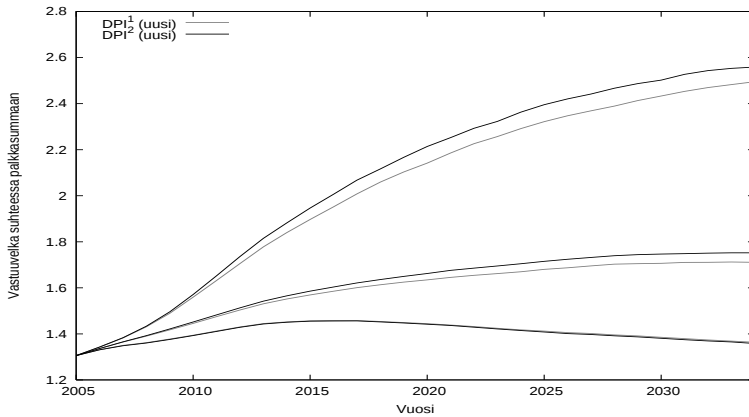
maksun mediaani laskee ajanhetkestä riippuen 0-2,3%:a verrattuna nykyjärjestelmään (kuva 2).



Kuva 18: Mediaani ja 90%-luottamusvälit uuden eläkejärjestelmän TyEL-maksulle sijoitusstrategialla DPI^1 ja DPI^2 .



Kuva 19: Mediaani ja 90%-luottamusvälit uuden eläkejärjestelmän vakavaraisuusasteelle sijoitusstrategialla DPI^2 .



Kuva 20: Mediaani ja 90%-luottamusvälit uuden järjestelmän vastuuvellalle suhteessa palkkasummaan sijoitusstrategialla DPI^2 .

6.4 Konkurssitodennäköisyydet

Taulukossa 5 on esitetty konkurssitodennäköisyydet, TyEL-maksun luottamusvälin yläraja (TyEL 95%) ja mediaani (TyEL 50%) vuonna 2034 molemmille eläkejärjestelmille ja sekä edellä käytettyille sijoitusstrategioille. Kon-

Taulukko 5: Konkurssitodennäköisyydet.

Järjestelmä	Strategia	$P(B^0)$	$P(B^{\frac{1}{3}})$	TyEL 95%	TyEL 50%
Nyky	FM^1	12,0%	21,4%	30,6%	28,6%
Nyky	DPI^1	6,3%	15,4%	30,9%	28,9%
Uusi	FM^1	3,9%	6,2%	30,6%	27,7%
Uusi	DPI^1	2,7%	5,2%	30,9%	27,1%
Uusi	FM^2	11,2%	16,0%	30,5%	26,2%
Uusi	DPI^2	4,4%	7,7%	30,9%	26,6%

kurssitodennäköisyyksiä arvioitaessa on huomioitava, että konkurssiraja on huomattavasti erilainen uudessa kuin vanhassa järjestelmässä sekä vakavaraisuusrajan laskentakaavan muuttumisen että uuden osaketuottosidonnaisen vastuuvelan osan myötä.

Kiinteän sijoitusallokaation strategioilla konkurssitodennäköisyydet ovat varsin korkeita, dynaamisilla strategioilla päästään huomattasti pienempiin todennäköisyyksiin mutta samalla TyEL-maksun jakauma liikkuu ylöspäin. Eläkeneuvotteluryhmän mukaan nykyjärjestelmässä osakepainolla 25% jokin heidän laskelmissaan käyttämästä yhtiöstä joutuu konkurssiin seuraavan kolmenkymmenen vuoden aikana 10% todennäköisyydellä [4, s. 85] kun käytetään konkurssimääritelmää B^0 . Tässä sama todennäköisyys saadaan jo 20% osakepainolla. Syitä voi olla monia, esimerkiksi yksittäisen yhtiön lähtövarallisuus ja vastuuvelan, kassavirtojen ja sijoitustuottojen stokastiikka vaikuttavat huomattavasti konkurssitodennäköisyyksiin. Alhainen simulointien määrä voi myös vaikuttaa tuloksiin, esimerkiksi sijoitusstrategialla FM^1 konkurssitodennäköisyys $P(B^0)$ vaihteli nykyjärjestelmässä välillä 9,8% - 13,9% ja konkurssitodennäköisyys $P(B^{\frac{1}{3}})$ välillä 18,9% - 23,7% kun käytettiin vain tuhatta simulaatiota. Eläkeneuvotteluryhmä ei ole raportoinut malliaan ja dataansa sellaisella tarkkuudella, että laskennan voisi toistaa tai syitä etsiä. Koska työeläkevakuuttamien on lakisääteistä, olisi kaikki eläkejärjestelmää koskevat laskelmat raportoitava julkisesti niin, että niitä voidaan kriittisesti tarkastella.

6.5 Laskuperustekorona noston rajoittaminen

Kuten esimerkiksi kuvista 3 ja 9 nähtiin, hyvien sijoitustuottojen tapauksessa osa sijoitustuotoista ei ohjaudu rahastoitujen eläkkeiden täydennyksiin vaan satunnaisesti tulee hyvin suuria asiakaspalautuksia suhteessa palkkasummaan. Sama ilmiö näkyy alhaisena TyEL-maksun alarajana mo-

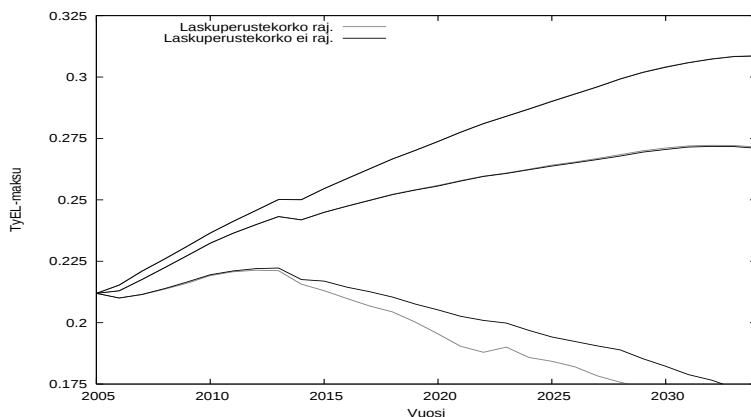
lemmissä eläkejärjestelmissä ja kaikille käytetyillä sijoitusstrategioilla. Suuria asiakaspalautuksia on myös eläkeneuvotteluryhmän laskelmissa [4, s. 59] [8, s. 15]. Eräs syy tähän saattaa olla, että järjestelmä ei ohjaa sijoitustuottoja riittävän nopeasti rahastoitujen eläkkeiden täydennyksiin.

Nykyisten säännösten mukaan laskuperustekorko määritellään puolen vuoden välein ja sitä voidaan korottaa kerrallaan korkeintaan 0,5%:a kerrallaan [4, s. 99], siis tässä tutkimuksessa käytetyssä vuositason mallissa yhden prosentin vuodessa. Laskuperustekorko riippuu työeläkejärjestelmän keskimääräisestä vakavaraisuusasteesta. Kuten esimerkiksi kuvista 11, 12, 16 ja 19 nähtiin, uudessa järjestelmässä ja korkeammilla osakesijoituksilla vakavaraisuusasteen vaihtelu on huomattavasti suurempaa kuin vanhassa järjestelmässä, ja osakesijoitusten kasvattaminen vielä lisää vaihtelua. Koska laskuperustekoron laskemista ei ole rajoitettu ja nostamista on, tästä voi seurata, että sijoitustuotot eivät ohjaudu eläkkeiden rahastoitujen osien täydennyksiin kovinkaan nopeasti.

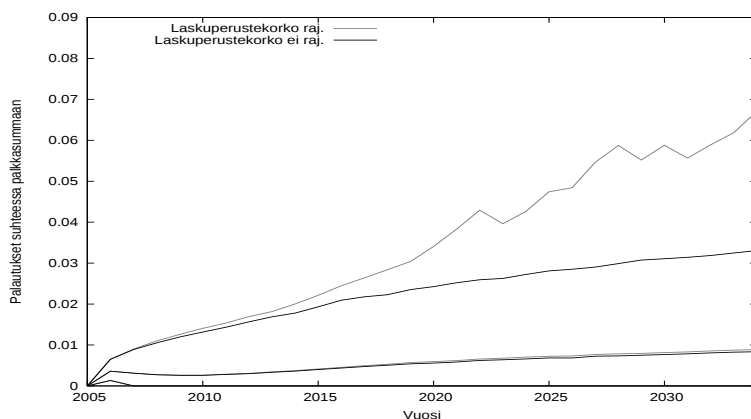
Tämän kappaleen laskelmissa laskuperustekoron nostoa ei ole rajoitettu. Kuvassa 21 on esitetty TyEL-maksu ja kuvassa 22 asiakaspalautukset uudessa järjestelmässä sijoitusstrategialla DPI^1 kun laskuperustekoron nostoa on ja ei ole rajoitettu. Vaikka ero TyEL-maksussa ei ole olennainen, laskuperustekoron nostorajoituksen poisto pienentää huomattavasti suuria asiakaspalautuksia. Kyse onkin enemmänkin siitä, pienennetäänkö TyEL-maksua rahastoista maksettavilla eläkkeillä vaiko asiakaspalautuksilla. Sama nähdään kuvasta 23, jossa rahastoitujen eläkkeiden vastuuvelka kasvaa hyvien sijoitustuottojen tapauksessa huomattavasti nopeammin kuin jos laskuperuskoron nousua on rajoitettu.

Taulukossa 6 on esitetty konkurssitodennäköisyydet sekä vuoden 2034 TyEL-maksun mediaani ja luottamusvälin yläraja. Suluissa on esitetty ero taulukossa 5 esitettyihin vastaaviin arvoihin, joissa laskuperustekoron nostoa on rajoitettu prosenttiyksikköön vuodessa. Uudessa järjestelmässä laskuperustekoron rajoituksen poistaminen nostaa konkurssitodennäköisyyksiä vähemmän kuin vanhassa järjestelmässä. Kasvua tulee lievästi kiinteällä sijoitusstrategialla FM^2 . Dynaamisilla strategioilla DPI^1 ja DPI^2 konkurssitodennäköisyyden kasvu on jo varsin marginaalinen, tosin samalla TyEL-maksun mediaani laskee kymmenyksen.

Kuten esimerkiksi kuvasta 22 nähdään, asiakaspalautusten suhde palkkasummaan kasvaa ajanmyötä. Tämä johtuu siitä, että palautusten määrä on sidottu toimintapääomaan, jonka määrä riippuu varallisuudesta ja vastuuvelasta. Koska vastuuvelan ja palkkasumman suhde kasvaa vuoteen 2034 mennessä lähtöhetken yhdestä noin kaksinkertaiseksi, kasvavat myös toimintapääomasta riippuvat asiakaspalautukset suhteessa palkkasummaan.



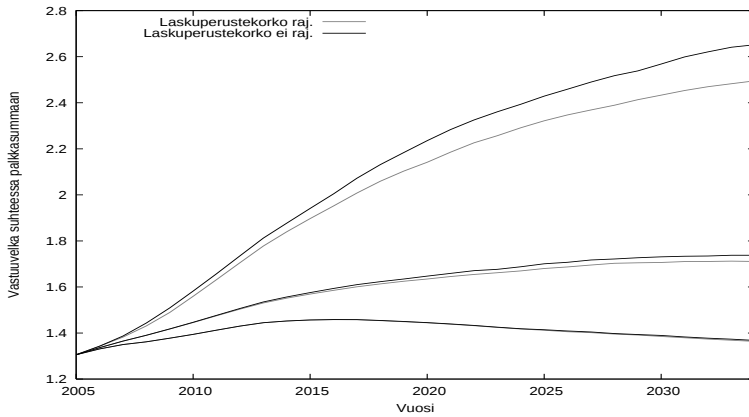
Kuva 21: Mediaani ja 90%-luottamusvälit eläkejärjestelmien TyEL-maksulle sijoitusstrategialla DPI^1 kun laskuperustekoron nousua ei ole rajoitettu.



Kuva 22: Mediaani ja 90%-luottamusväli palautuksille sijoitusstrategialla DPI^1 kun laskuperustekoron nousua ei ole rajoitettu.

6.6 Palautusten alaraja

Asiakaspalautusten maksu vaikuttaa eläkelaitosten vakavaraisuuteen ja TyEL-maksuun. Edellisissä laskelmissa palautusten alaraja on riippunut ainoastaan vakavaraisuusasteesta, ei sijoitustoiminnalla muutettavissa olevasta vakava-



Kuva 23: Mediaani ja 90%-luottamusväli vastuuvellalle suhteessa palkkasummaan sijoitusstrategialla DPI^1 kun laskuperustekoron nousua ei ole rajoitettu.

Taulukko 6: Konkurssitodennäköisyydet ja TyEL-maksut kun laskuperustekoron nousua ei ole rajoitettu.

Järjestelmä	Strategia	$P(B^0)$	$P(B^{\frac{1}{3}})$	TyEL 95%	TyEL 50%
Nyky	FM^1	12,7% (+0,7)	22,5% (+1,1)	30,6% (0,0)	28,4% (-0,2)
Nyky	DPI^1	6,6% (+0,3)	16,3% (+0,9)	30,9% (0,0)	28,8% (-0,1)
Uusi	FM^1	3,9% (0,0)	6,2% (+0,0)	30,6% (0,0)	27,7% (0,0)
Uusi	DPI^1	2,8% (+0,1)	5,3% (+0,1)	30,9% (0,0)	27,1% (0,0)
Uusi	FM^2	11,5% (+0,3)	16,5% (+0,5)	30,4% (-0,1)	26,1% (-0,1)
Uusi	DPI^2	4,4% (0,0)	8,0% (+0,3)	30,9% (0,0)	26,5% (-0,1)

raisuusrajasta. Eläkeneuvotteluryhmä esittää yhtenä vaihtoehtona palautusten alarajaksi vakavaraisuusrajaa kun kyseessä on työeläkeyhtiö [4, s. 57]. Asiakaspalautusten määrä ei saisi viedä työeläkeyhtiön varallisuutta alle vakavaraisuusrajan. Tässä kappaleessa asiakaspalautukset lasketaan kaavan (8)

sijaan kaavalla

$$h_t = \begin{cases} 0 & \text{jos } (1 - \alpha)U_t < V_t, \\ \alpha U_t & \text{jos } (1 - \alpha)U_t \geq V_t \text{ ja } U_{t-1} - 4V_{t-1} \leq 0 \\ & \text{tai } (1 - \alpha)U_t - 4V_t \leq 0, \\ \alpha U_t + \max(0; \frac{1}{3}((1 - \alpha)U_t - 4V_t)) & \text{muuten.} \end{cases}$$

Eläkelaitoksen maksimipalautus olisi siis vakavaraisuusrajan yläpuolella annettu prosenttimäärä α toimintapääomasta eivätkä palautukset saisi viedä yhtiötä vakavaraisuusrajan alapuolelle. Toimintapääoman ollessa yli nelinkertainen vakavaraisuusrajan vähintään kahtena peräkkäisenä vuonna, ylityksistä maksetaan kolmasosa asiakaspalautuksina. Esimerkkinä eläkeneuvotteluryhmän raportissa on annettu 1,5%:a toimintapääomasta.

Taulukossa 7 on esitetty vakavaraisuusrajan mukaan lasketut konkurssitodennäköisyydet $(P(B^{\frac{1}{3}})^1)$ ja vuoden 2034 TyEL-maksun 95%-kvantiili (TyEL 95¹) sekä mediaani (TyEL 50¹) uudessa järjestelmässä kun palautusprosentti α on 0,5-, 1- ja 1,5%:a toimintapääomasta. Vastaavat arvot on laskettu myös kaavalla (8) vaihdellen α :n arvoja (yläindeksi 2). Asiakaspalautusten maksaminen alarajalle nostaa selvästi konkurssitodennäköisyyttä verrattuna jos vastaava määrä maksettaisiin vain 15% vakavaraisuuden ylittävältä osalta. Vuoden 2034 TyEL-maksun mediaaniin (TyEL 50) alarajalla ei juurikaan ole merkitystä. Vuoden 2034 TyEL-maksun 95%-pisteeseenkin (TyEL 95) vaikutus on korkeintaan 0,1%:a. α :n arvo vaikuttaa huomattavasti sekä TyEL-maksuun että konkurssitodennäköisyyteen alarajasta riippumatta.

6.7 Sijoitusstrategiat

Edellisten kappaleiden tuloksista on käynyt ilmi, että sijoitusstrategia vaikuttaa huomattavasti TyEL-maksuun ja vakavaraisuuteen. Tässä tutkimuksessa käytetyistä sijoitusstrategioista voidaan muodostaa ääretön määrä erilaisia kombinaatioita muuttamalla sijoitusstrategian parametreja. Tässä kappaleessa esitetään esimerkinomaisesti miten eri sijoitusstrategiat ja niiden parametrien eri kombinaatiot vaikuttavat tuloksiin uudessa järjestelmässä.

Määritellään kiinteiden sijoitusallokaatioiden joukko FM^3 siten, että lyhyen koron ja kiinteistösijoitusten osuudet määräytyvät taulukon 1 mukaan ja osakkeiden yhteenlaskettu osuus on 1,5%, 4%, 6,5%, ..., 44%, loput sijoitetaan pitkän koron sijoituksiin. Kuvassa 24 on esitetty vuoden 2034 TyEL-maksun mediaani ja 95%-piste ja osakesijoitusten välinen riippuvuus. Mediaani riippuu lähes lineaarisesti osakkeiden sijoitusosuudesta. TyEL-maksun

Taulukko 7: Konkurssitodennäköisyydet ja vuoden 2034 TyEL-maksut uudessa järjestelmässä kun asiakaspalautukset sallittu vakavaraisuusrajalle asti.

Strategia	α	$P(B^{\frac{1}{3}})^1$	$P(B^{\frac{1}{3}})^2$	TyEL 50 ¹	TyEL 50 ²	TyEL 95 ¹	TyEL 95 ²
FM^1	0,5%	6,1%	5,5%	27,8%	27,8%	30,7%	30,7%
FM^1	1,0%	6,6%	5,6%	27,8%	27,8%	30,6%	30,7%
FM^1	1,5%	7,2%	5,8%	27,8%	27,8%	30,6%	30,7%
FM^2	0,5%	15,3%	14,6 %	26,4%	26,4%	30,6%	30,6%
FM^2	1,0%	16,4%	14,9%	26,4%	26,4%	30,5%	30,5%
FM^2	1,5%	17,4%	15,2%	26,3%	26,3%	30,5%	30,5%
DPI^1	0,5%	5,0%	4,5%	27,3%	27,3%	31,0%	31,0%
DPI^1	1,0%	5,6%	4,6%	27,3%	27,3%	30,9%	31,0%
DPI^1	1,5%	6,4%	4,7%	27,3%	27,2%	30,9%	30,9%
DPI^2	0,5%	7,5%	6,9%	26,8%	26,8%	31,0%	31,0%
DPI^2	1,0%	8,4%	7,1%	26,8%	26,7%	30,9%	30,9%
DPI^2	1,5%	9,5%	7,2%	26,8%	26,7%	30,9%	30,9%

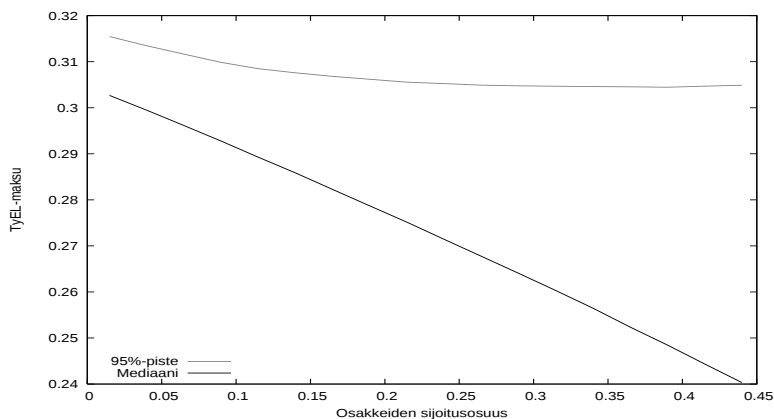
Taulukko 8: Dynaamisten sijoitusstrategioiden parametrit.

Strategiajoukko	w_t^{si}	w_t^{pi}	b^l	b^u	λ
DPI^3	8%	13%	5%	30%	0,5, 0,55, ..., 1,7
DPI^4	8%	13%	10%	35%	0,5, 0,55, ..., 1,7
DPI^5	8%	13%	15%	40%	0,5, 0,55, ..., 1,7

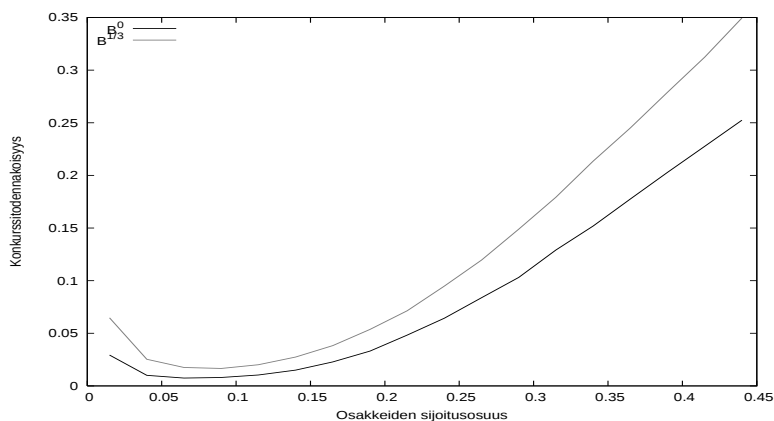
95%-pistettä saadaan alennettua lisäämällä osakesijoituksia 25%:in, sitä suuremmilla sijoitusosuuksilla sitä ei juurikaan saada laskettua. Kuvassa 25 on esitetty osakesijoitusten ja molempien määritelmien mukaisten konkurssien riippuvuus. Osakkeiden osuuden laskeminen alle 10% ei enää pienennä konkurssiriskiä ja osakesijoitusten laskeminen alle 5% alkaa kasvattaa konkurssiriskiä. Havainto vastaa Heikkilän [10, s. 34] viittaamia tuloksia.

Määritellään kolme dynaamisten sijoitusstrategioiden joukkoa DPI^3 , DPI^4 ja DPI^5 taulukon 8 parametrien mukaan, toisin sanoen vaihdellaan osakesijoitusten alarajaa välillä 5%-15% ja kasvatetaan ylärajaa vastaavasti välillä 30%-40% sekä annetaan osakepainon määrävään parametrin λ vaihdella välillä 0,5 - 1,7.

Kuvassa 26 on esitetty kuinka vuoden 2034 TyEL-maksun mediaani riip-



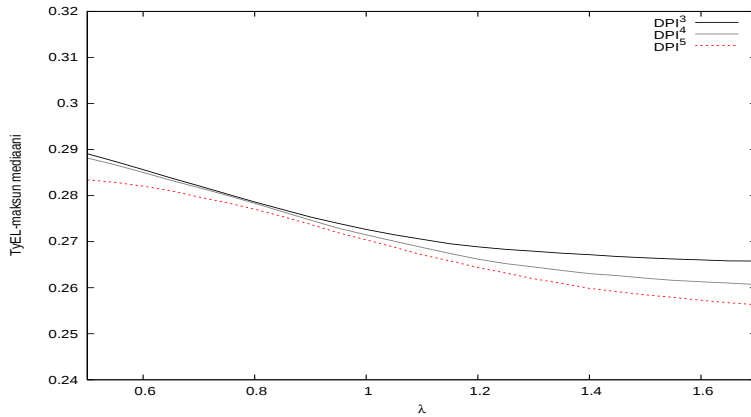
Kuva 24: Osakesijoitukset ja vuoden 2034 TyEL-maksun mediaani sekä 95%-piste kiinteällä sijoitusstrategialla.



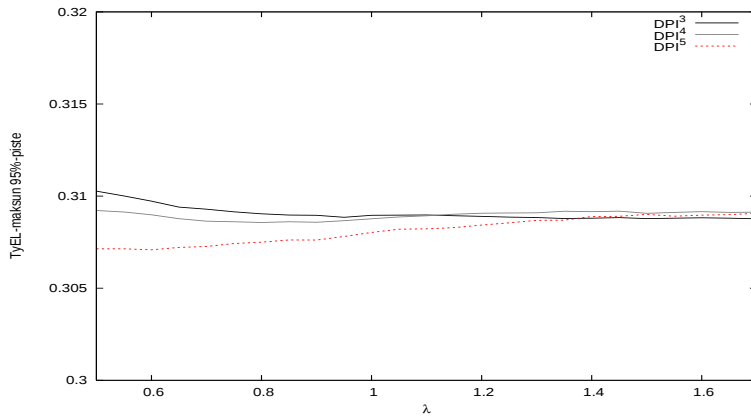
Kuva 25: Osakesijoitukset ja konkurssitodennäköisyys kiinteällä sijoitusstrategialla.

puu osakesijoitusten osuuden kasvattamisesta. Riippuvuus on huomattavan erilainen kuin mitä kiinteän sijoitusallokaation strategialla, jossa osakepaino ei mitenkään reagoi vakavaraisuusasteeseen. Vastaava eroavuus on havaittavissa kuvasta 27, jossa on esitetty kuinka vuoden 2034 TyEL-maksun yläraja riippuu osakesijoitusten osuuden kasvattamisesta. Kuvassa 28 on esitetty

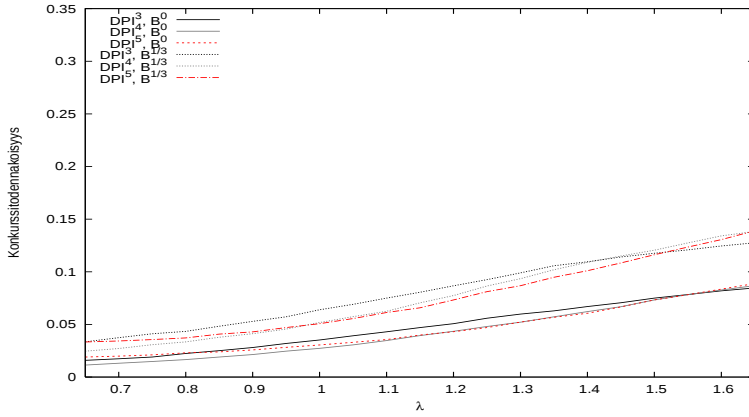
kuinka molempien määritelmien mukainen konkurssitodennäköisyys riippuu osakesijoitusten osuuden kasvattamisesta. Ero kiinteän allokaation sijoitusstrategiaan on jälleen huomattava.



Kuva 26: Osakesijoitukset ja vuoden 2034 TyEL-maksun mediaani dynaamisilla sijoitusstrategioilla.

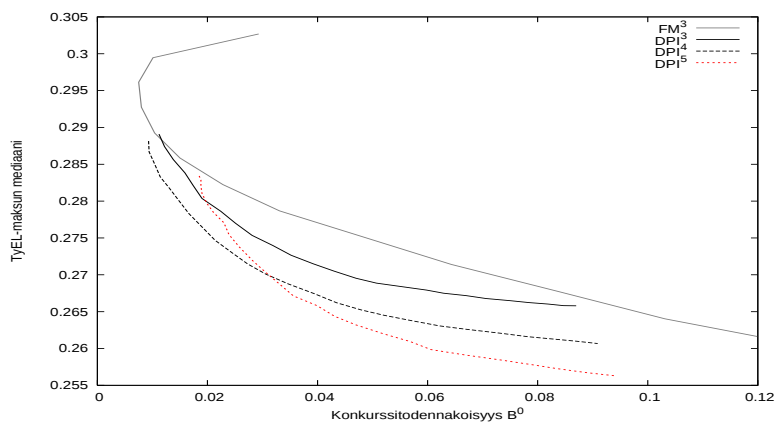


Kuva 27: Osakesijoitukset ja vuoden 2034 TyEL-maksun 95%-piste dynaamisilla sijoitusstrategioilla.

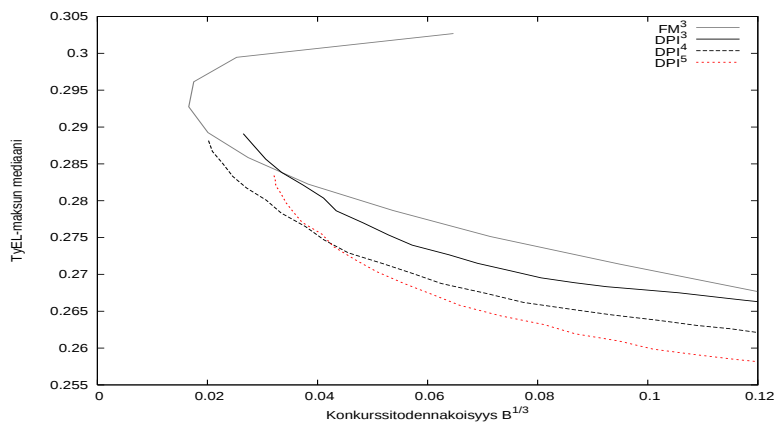


Kuva 28: Osakesijoitukset ja konkurssitodennäköisyydet dynaamisilla sijoitusstrategioilla.

Kuvissa 29 ja 30 on esitetty konkurssiriskien ja vuoden 2034 TyEL-maksun mediaanin riippuvuus kiinteällä ja dynaamisilla strategioilla. Molemmista kuvista nähdään sijoitusstrategian selkeä vaikutus saavutettavaan TyEL-maksun mediaaniin annetulla konkurssitodennäköisyydellä. Ero on huomattava, valitusta konkurssitodennäköisyydestä riippuen sijoitusstrategia vaikuttaa jopa yli 1,5% TyEL-maksun mediaaniin. Ero saattaa olla suurempikin jollain toisilla sijoitusstrategioilla tai parametrivalinnoilla. Tässä tutkimuksessa käytetyt strategiat eivät esimerkiksi käytä informaatiota kaikkien stokastisten tekijöiden tilasta, kuten esimerkiksi korkotasosta. Nämä huomioiden esimerkiksi numeerisen optimoinnin menetelmin saatettaisiin päästä huomattavasti parempiin tuloksiin kuin mitä tässä raportissa on esitetty. Optimointi olisi kuitenkin erittäin aikaa vievää eläkejärjestelmän monimutkaisuuden vuoksi, eikä kaikkia tässä tutkimuksessa käsiteltyjä asioita olisi voitu tutkia kohtuullisessa ajassa.



Kuva 29: Vuoden 2034 TyEL-maksun mediaani ja konkurssiriski B^0 .



Kuva 30: Vuoden 2034 TyEL-maksun mediaani ja konkurssiriski $B^{\frac{1}{3}}$.

Kiitokset Kiitän Peter Biströmiä, Heikki Palmia, Antero Rannetta ja Ismo Riskua hyödyllisistä kommenteista ja ehdotuksista, joista on ollut suuri apu tämän raportin kirjoittamisessa. Kiitän Sosiaali- ja terveysministeriötä tutkimuksen rahoittamisesta.

Viitteet

- [1] J.M. Alho. The population of Finland in 2050 and beyond. Discussion papers No. 826, ETLA, 2002.
- [2] P. Biström, T. Klaavo, I. Risku ja H. Sihvonen. Eläkemenot, maksut ja rahastot vuoteen 2075. Eläketurvakeskuksen raportteja, Eläketurvakeskus, 2004.
- [3] F. Black ja R. Jones. Simplifying portfolio insurance for corporate pension plans. *Journal of Portfolio Management*, 14, 33–37, 1988.
- [4] Eläkeneuvotteluryhmä. Työeläkejärjestelmän sijoitustoimintaa koskeva selvitys. Tekninen raportti, 2006.
- [5] Eläketurvakeskus. Työeläkkeiden indeksiturva 1.1.2005. 2005.
- [6] R.F. Engle ja C.W.J. Granger. Co-integration and error correction: representation, estimation and testing. *Econometrica*, 55, no. 2, 251–276, 1987.
- [7] S.E. Fleten, K. Høyland ja S.W. Wallace. The performance of stochastic dynamic and fixed mix portfolio models. *European Journal of Operations Research*, 140, 37–49, 2002.
- [8] HE77/2006. Hallituksen esitys Eduskunnalle eläkelaitosten toimintapäätösmää ja vastuuvulkaa koskevien säännösten muuttamiseksi. 2006.
- [9] HE79/2006. Hallituksen esitys Eduskunnalle laeiksi eläkelaitoksen vakavaraisuusrajan laskemisesta ja vastuuvulan kattamisesta sekä eräiden siihen liittyvien lakien muuttamisesta. 2006.
- [10] M. Heikkilä. Tel-järjestelmän yhteinen tuottovelvoite ja yksittäisen yhtiön sijoitustuottojen jäännösvarianssi. Working paper, Suomen Aktuaariyhdistys, 2004.
- [11] P. Hilli, M. Koivu ja T. Pennanen. Sijoitustuottomalli työeläkelaitoksille. Vakuutusvalvontaviraston julkaisusarja: 3, Vakuutusvalvontavirasto, 2006.

- [12] P. Hilli, M. Koivu, T. Pennanen ja A. Ranne. A stochastic programming model for asset and liability management of a Finnish pension company. *Annals of Operations Research*, 2004. To appear.
- [13] P. Hilli ja T. Pennanen. Työeläkelaitoksen kassavirta-vastuumalli. Vakuutusvalvontaviraston julkaisusarja, Vakuutusvalvontavirasto, 2006.
- [14] M. Koivu, T. Pennanen ja A. Ranne. Modeling assets and liabilities of a Finnish pension company: a VEqC approach. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005, no. 1, 46–76, 2005.
- [15] Laki vakuutusvalvontavirastosta. 2006.
- [16] Asetus työeläkevakuutusyhtiön vakavaraisuusrajan laskemisesta. 23.12.1999/1281. 1999.
- [17] C. Lindell. Elinaika pitenee - miten käy eläkeiän? Eläketurvakeskuksen raportteja 18, Eläketurvakeskus, 1998.
- [18] A.F. Perold ja W.F. Sharpe. Dynamic strategies for asset allocation. *Financial Analyst Journal*, 4, 16–27, 1988.
- [19] TEL-P 2005. TEL:n mukaisen perusvakuutuksen erityisperusteet. Kokooma, 2005.
- [20] TyEL. Työntekijän eläkelaki. 2006.
- [21] Työmarkkinajärjestöjen täydennyssopimus 5.9.02. 2002.

Numerical study of discretizations of multistage stochastic programs

Teemu Pennanen* and Petri Hilli
Department of Business Technology
Helsinki School of Economics
PL 1210, 00101 Helsinki, Finland
`[pennanen,hilli]@hse.fi`

December 13, 2006

Abstract

This paper presents a numerical study of a deterministic discretization procedure for multistage stochastic programs where the underlying stochastic process has a continuous probability distribution. The discretization procedure is based on quasi-Monte Carlo techniques originally developed for numerical multivariate integration. The solutions of the discretized problems are evaluated by statistical bounds obtained from random sample average approximations and out of sample simulations. In the numerical tests, the optimal values of the discretizations as well as their first-stage solutions seem to converge to those of the original infinite-dimensional problem as the discretizations are made finer.

1 Introduction

This paper is concerned with numerical solution of multistage stochastic programs where the underlying stochastic process has a continuous distribution. These are infinite-dimensional optimization problems that come up quite naturally in practical decision making. For example, in financial applications it is customary to model uncertain future development of asset prices by stochastic processes that have a parametric description of a continuous

*The work of this author was supported by Finnish Academy under contract no. 3385

distribution. Despite the large number of potential applications only few papers have been devoted to numerical solution of such models; see Olsen [12], Frauendorfer [5], Pflug [16], Shapiro [22, 23], Chiralaksanakul [2], Chiralaksanakul and Morton [3], Blomvall and Shapiro [1], Pennanen and Koivu [15], Pennanen [13, 14], Kall and Mayer [9] and Heitsch and Römisch [7, 8]. This paper presents a numerical study of the discretization techniques proposed in [15, 13, 14].

We will consider the following stochastic programming model from Rockafellar and Wets [18, 19, 20, 21]. At each *stage* $k = 0, \dots, K$, the decision maker observes the value of a random variable ξ_k , and makes a decision x_k depending on the observed values of $\xi_0, \dots, \xi_k$. Each ξ_k takes values in a Borel subset Ξ_k of $\mathbb{R}^{d_k}$ and x_k is $\mathbb{R}^{n_k}$ -valued. We assume that Ξ_0 is a singleton, so that ξ_0 and thus x_0 will be deterministic. The vector $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_K)$ will be modeled as a random variable in the probability space $(\Xi, \mathcal{F}, P)$, where $\Xi = \Xi_0 \times \dots \times \Xi_K$, $\mathcal{F}$ is the Borel σ -field on Ξ and P is a probability measure on $(\Xi, \mathcal{F})$. A realization of ξ and a sequence $x = (x_0, \dots, x_K)$ of decisions will result in a cost given by a function $f : \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, where $n = n_0 + \dots + n_K$. We will study *multistage stochastic programs* of the form

$$\underset{x \in \mathcal{N}(P)}{\text{minimize}} \quad E^P f(x(\xi), \xi), \quad (SP(P))$$

where E^P is the expectation operator, f is a *convex normal integrand* on $\mathbb{R}^n \times \Xi$ and

$$\mathcal{N}(P) = \{x \in L^\infty(\Xi, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^n) \mid x \text{ contains an } (\mathcal{F}_k)_{k=0}^K\text{-adapted function}\}.$$

Here $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^K$ is the filtration of σ -fields

$$\mathcal{F}_k := \{B_k \times \Xi_{k+1} \times \dots \times \Xi_K \mid B_k \in \mathcal{B}_k\},$$

where $\mathcal{B}_k$ is the Borel σ -field on $\Xi_0 \times \dots \times \Xi_k$. A function $\tilde{x} = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_K)$ is said to be *adapted* to $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^K$ if for each k , $\tilde{x}_k$ is $\mathcal{F}_k$ -measurable, or equivalently, only depends on the part of ξ that has been observed by stage k . We would like to emphasize that the function f is allowed to take on the value $+\infty$ so that various constraints (of the “almost surely-type”) can be taken into account through infinite penalties.

When the stochastic process ξ is a random variable with an infinite sample space (as in most econometric models), $(SP(P))$ is an infinite-dimensional optimization problem whose solution requires discretization. One way to discretize it is to replace the original measure P by a finitely supported measure of the form

$$P^\nu = \sum_{i \in I(\nu)} p^{\nu, i} \delta_{\xi^{\nu, i}},$$

where $I(\nu)$ is a finite index set, $\delta_{\xi^{\nu,i}}$ is the unit mass at a point $\xi^{\nu,i} \in \Xi$, and $p^{\nu,i} > 0$. Then $L^\infty(\Xi, \mathcal{F}, P^\nu; \mathbb{R}^n) \cong (\mathbb{R}^n)^{I(\nu)}$, and $(SP(P^\nu))$ can be written in the finite-dimensional form

$$\underset{x \in \mathcal{N}(P^\nu)}{\text{minimize}} \quad \sum_{i \in I(\nu)} p^{\nu,i} f(x(\xi^{\nu,i}), \xi^{\nu,i}), \quad (SP(P^\nu))$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(P^\nu) &= \{x \in L^\infty(\Xi, \mathcal{F}, P^\nu; \mathbb{R}^n) \mid x \text{ contains an } (\mathcal{F}_k)_{k=0}^K\text{-adapted function}\} \\ &= \{x \in L^\infty(\Xi, \mathcal{F}, P^\nu; \mathbb{R}^n) \mid x_k(\xi^{\nu,i}) = x_k(\xi^{\nu,j}) \text{ if } \xi_l^{\nu,i} = \xi_l^{\nu,j} \forall l = 0, \dots, k\}. \end{aligned}$$

This is a mathematical program which can in principle be solved numerically by general purpose solvers or special purpose algorithms designed to take advantage of problem structure.

A few methods for constructing approximations P^ν of P for purposes of multistage stochastic programming have been proposed. The best known, most widely studied and probably the most widely applied method is conditional sampling, where P^ν is constructed by recursively sampling from the conditional distribution of ξ_k given $\xi_0, \dots, \xi_{k-1}$; see [22, 2, 3, 23, 1]. In barycentric approximation, P^ν is constructed so that, under certain convexity properties with respect to the random variables, one obtains lower/upper approximations of the original problem; see [5]. In the methods of [16] and [7, 8], the general idea is to choose P^ν so as to approximate the original measure P as well as possible, in the sense of a metric in the space of probability measures. The same general idea is behind *quasi-Monte Carlo* (QMC) methods, which are a class of integration quadratures; see e.g. [10]. The main difference is in the choice of the metric and in that in QMC methods the original measure is the uniform distribution in the unit cube. For the metric used in QMC, there exist many (number theoretic) techniques for constructing discrete measures that are close to the original one. To apply QMC methods, one has to write a given integral in terms of the uniform distribution, which can often be done by an appropriate change of variables.

We would like to emphasize that discretizations obtained with conditional sampling are *random* whereas those obtained with the methods of [5, 16, 7, 8] or with QMC are *deterministic*. This is a fundamental difference in that the first-stage solution obtained through deterministic discretization can be viewed as a *decision rule* that is fully determined by the original infinite dimensional problem and the chosen discretization procedure; see Section 3.2. This way, a deterministic discretization procedure gives a well-defined candidate solution for the original multistage stochastic program that can be evaluated e.g. by out-of-sample simulations.

QMC was first proposed for discretization of multistage stochastic programs in [15]. It was shown in [13, 14] that, under fairly general conditions, QMC produces consistent approximations in the sense that the optimal values of the approximations converge to that of the original problem and that the cluster points of the first stage solutions are optimal first stage solutions of the original problem. However, the results of [13, 14] are nonquantitative and, in particular, say nothing about the accuracy of $(SP(P^\nu))$ for a fixed ν . The purpose of this paper is to present a numerical study of the discretization procedures studied in [15, 13, 14]. We solve a sequence of refined discretizations numerically and compute statistical bounds for the optimal value of the original infinite-dimensional problem. The lower bound is obtained as a sample average of optimal values of random discretizations whereas the upper bound is obtained through out-of-sample evaluation of the strategies obtained through QMC discretizations. The results support the theoretical findings of [13, 14] namely that the optimal values of the discretizations converge to that of the original problem and that the cluster points of first stage solutions are optimal first stage solutions of the original problem.

The rest of this paper is organized as follows. Section 2 recalls the discretization procedure from [15, 14]. Section 3 describes the statistical lower and upper bounds used in the numerical tests. Section 4 describes the test problems and summarizes the computational results. The parameter values used in the test problems are given in the Appendix.

2 Discretizations

As in [15, 14], we assume that the underlying stochastic process ξ is driven by a time series model of the form

$$\xi_k = g_k(\xi_0, \dots, \xi_{k-1}, \omega_k) \quad \text{for } k = 1, \dots, K, \quad (1)$$

where ξ_0 is given, $\omega_1, \dots, \omega_K$ are mutually independent random variables, with ω_k uniformly distributed in the d_k -dimensional unit cube $(0, 1)^{d_k}$, and $g_k : \Xi_0 \times \dots \times \Xi_{k-1} \times (0, 1)^{d_k} \rightarrow \Xi_k$ are Borel-measurable functions. It follows that $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_K)$ is uniquely determined by $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_K)$ so that

$$P = UG^{-1}, \quad (2)$$

where G denotes the mapping that sends ω to ξ and $U = U_1 \times \dots \times U_K$, where U_k is the uniform distribution on $(0, 1)^{d_k}$. Notation (2) means that $P(A) = U(G^{-1}(A))$ for every $A \in \mathcal{F}$, or equivalently, $E^P \varphi(\xi) = E^U \varphi(G(\omega))$ for any measurable function φ on Ξ .

Expression (2) suggests the following

Discretization procedure

1. For each $k = 1, \dots, K$, approximate U_k by a discrete measure U_k^ν ;
2. Let $U^\nu = U_1^\nu \times \dots \times U_K^\nu$ and $P^\nu = U^\nu G^{-1}$.

More concretely, if for $k = 1, \dots, K$

$$U_k^\nu = \sum_{i \in I_k(\nu)} p_k^{\nu,i} \delta_{\omega_k^{\nu,i}},$$

where $I_k(\nu)$ is a finite index set, then

$$U^\nu = \sum_{i \in I(\nu)} p^{\nu,i} \delta_{\omega^{\nu,i}},$$

where

$$\begin{aligned} I(\nu) &= \{(i_1, \dots, i_K) \mid i_k \in I_k(\nu)\}, \\ \omega^{\nu,i} &= (\omega_1^{\nu,i_1}, \dots, \omega_K^{\nu,i_K}), \\ p^{\nu,i} &= p_1^{\nu,i_1} \cdots p_K^{\nu,i_K}, \end{aligned}$$

and $P^\nu = U^\nu G^{-1}$ becomes

$$P^\nu = \sum_{i \in I(\nu)} p^{\nu,i} \delta_{\xi^{\nu,i}},$$

where $\xi^{\nu,i} = G(\omega^{\nu,i})$.

When the discrete measures U_k^ν are the empirical measures corresponding to a random sample of size $|I_k(\nu)|$, the above procedure is nothing but the well-known conditional sampling procedure. It was shown in [13, 14] that if each measure U_k^ν converges weakly to the uniform distribution, as $\nu \rightarrow \infty$, then under rather mild conditions, problems $(SP(P^\nu))$ will be consistent discretizations of $(SP(P))$ in the sense that the optimal values of $(SP(P^\nu))$ converge to that of $(SP(P))$ and all cluster points of first-stage solutions of $(SP(P^\nu))$ are optimal first-stage solutions of $(SP(P))$.

The nontrivial parts in implementing the above procedure are the construction of the discrete measures U_k^ν that approximate the uniform distribution and the evaluation of $G(\omega^{\nu,i})$ for given $\omega^{\nu,i}$, that is, the evaluation of the functions (1) for $k = 1, \dots, K$. As for U_k^ν , we will use *quasi-Monte Carlo* (QMC) methods, as proposed in [15]. In QMC, one sets $p_k^{\nu,i} = 1/|I_k(\nu)|$ and

the points $\omega_k^{\nu,i}$ are chosen so as to minimize certain measure of uniformity. There exists a wide literature on such methods; see for example Niederreiter [10], Sloan and Joe [24] or Niederreiter and Talay [11].

Difficulty of evaluating $G(\omega_k^{\nu,i})$ depends on the form of the time series model at hand. For example, in (multivariate) ARMA, VEqC or GARCH models with Gaussian innovations this part is quite simple. For them, evaluation of g_k comes down to evaluating the inverse of the univariate Gaussian distribution function at the components of the vectors ω_k^{ν,i_k} , forming the Cholesky factorization of a covariance matrix and performing few matrix-vector multiplications. These operations can be executed quite efficiently by publicly available subroutines.

3 Statistical bounds for the optimal value

3.1 Lower bounds

It is well-known that if one makes random discretizations by conditional sampling (i.e. taking U_k^ν in the above discretization procedure to be empirical measures corresponding to random samples), the corresponding optimal value v^ν of $(SP(P^\nu))$ is a random number whose expectation is less than that of $(SP(P))$; see Shapiro [22], Chiralaksanakul [2, Theorem 4] or Chiralaksanakul and Morton [3]. Moreover, v^ν converges with probability one to the optimal value of $(SP(P))$ as $\nu \rightarrow \infty$ provided the sample sizes $|I_k(\nu)|$ tend to infinity. These properties remain valid if instead of crude Monte Carlo sampling one uses non-iid sampling techniques such as Latin hyper cube sampling or antithetic sampling; see for example Glasserman [6, Chapter 4]. Such techniques can result in more efficient estimates in direct numerical integration and possibly tighter lower bounds in random discretization of stochastic programs.

One can estimate the expectation of v^ν by constructing N independent random discretizations and taking the average over the corresponding optimal values. The resulting average v_N^ν provides a “statistical lower bound” for the optimal value of $(SP(P))$. To our knowledge, the only numerical study of such estimates in case of multistage stochastic programs with continuous distributions has been reported in [1].

3.2 Upper bounds

For any $x \in \mathcal{N}(P)$ the expectation $E^P f(x(\xi), \xi)$ is greater than or equal to the optimal value of $(SP(P))$. The expectation can be approximated by

general techniques of numerical integration. Using Monte Carlo sampling one obtains random approximations whose expectations equal $E^P f(x(\xi), \xi)$. Besides being a statistical upper bound for the optimal value of $(SP(P))$ the sample average gives also an unbiased estimator of the quality of the chosen strategy $x \in \mathcal{N}(P)$. Such a technique for evaluating a decision strategies is often called *out of sample* testing.

We propose to use strategies given by recursive use of the discretization procedure described in the Section 2. This will not only give upper bounds for the optimal value of $(SP(P))$ but it will also provide an unbiased test for the quality of the solutions of our discretizations. Other, computationally less demanding, methods for generating policies that can be used in computation of upper bounds have been proposed in [2, Section 3.3], [3] and [1].

A discrete measure $U^\nu = U_1^\nu \times \cdots \times U_K^\nu$ chosen in the discretization procedure of Section 2 gives rise to an adapted strategy $x^\nu \in \mathcal{N}(P)$ as follows. Given a scenario $\xi^i = (\xi_0^i, \dots, \xi_K^i)$, define $x^\nu(\xi^i) = (x_0^\nu(\xi^i), \dots, x_K^\nu(\xi^i))$ recursively for $k = 0, \dots, K$ by letting $x_k^\nu(\xi^i)$ be the first-stage solution of the discretization of the multistage stochastic program

$$\underset{x \in \mathcal{N}_k(P_k)}{\text{minimize}} \quad E^{P_k} f_k(x(\xi), \xi), \quad (SP_k(P_k))$$

where P_k denotes the conditional probability distribution of $(\xi_{k+1}, \dots, \xi_K)$ given $(\xi_0, \dots, \xi_k) = (\xi_0^i, \dots, \xi_k^i)$ and f_k is the normal integrand obtained from f by fixing the values of $\xi_0, \dots, \xi_k$ and $x_0, \dots, x_{k-1}$ to $\xi_0^i, \dots, \xi_k^i$ and $x_0^i, \dots, x_{k-1}^i$, respectively. Here, we discretize $(SP_k(P_k))$ with the procedure of Section 2 using the discrete measure $U_{k+1}^\nu \times \cdots \times U_K^\nu$. Note that the conditional distribution P_k is determined simply by fixing the values of $\xi_0, \dots, \xi_k$ to $\xi_0^i, \dots, \xi_k^i$ in (1). In this way, each discretization (choice of a QMC technique and the number of quadrature points per stage) gives rise to an adapted strategy $x^\nu \in \mathcal{N}(P)$ that can be evaluated numerically along a given scenario by solving a sequence of discretized multistage stochastic programs $(SP_k(P_k))$, $k = 0, \dots, K$.

The out of sample test proceeds by sampling M scenarios $(\xi^i)_{i=1}^M$ of the stochastic process ξ . Then along each scenario $\xi^i = (\xi_0^i, \dots, \xi_K^i)$, one solves discretizations of problems $(SP_k(P_k))$ for $k = 0, \dots, K$ and records the value of $f(x^\nu(\xi^i), \xi^i)$. Again, one can use variance reduction techniques instead of crude Monte Carlo when constructing the scenarios $(\xi^i)_{i=1}^M$.

4 Numerical tests

The discretization procedure of Section 2 was applied to four different multistage stochastic programs where the stochastic process ξ was driven by time

series models of AR-, VEqC- and GARCH-type. Each of the four problems was discretized by choosing the discrete measures U_k^ν as empirical measures corresponding to quasi-Monte Carlo methods with equal number $|I_k(\nu)| = L$ of quadrature points for each period $k = 0, \dots, K$. For a fixed L , we then solved the discretization, recorded the optimal value and computed lower and upper bounds. The lower bound was computed by making $N = 1000$ random discretizations with Monte Carlo with L points per period. The upper bound was computed by making $M = 10000$ out of sample simulations with Monte Carlo and using quasi-Monte Carlo with L points per stage when solving the problems $(SP_k(P_k))$. We then increased the number L of quadrature points per stage and repeated the computations. The quasi-Monte Carlo method used in the experiments was the Sobol sequence [25]. We computed also a second set of lower and upper bounds by replacing Monte Carlo by antithetic sampling. In antithetic sampling, one half of the sample points are independently uniformly distributed in the unit cube and the second half is obtained by reflecting each sample point through the center of the cube.

The computations were performed on Red Hat Enterprise Linux WS v.4 operating system running on workstation with 64-bit 3.8GHz Intel Xeon processor and 8GB memory. The discretization procedure was implemented in C programming language using CBLAS and LAPACK libraries, Numerical recipes C-routines [17], Marsenne twister (www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/emt.html) for random number generation and Peter J. Acklam's algorithm for the inverse of the univariate normal distribution (home.online.no/~pjacklam/notes/invnorm). The implementation applies to multivariate time series models of ARMA-, VEqC- and GARCH-type. It takes as input the parameters of the time series model, the initial values ξ_0 of the time series, the number of periods K and the number L of quadrature points used for each $k = 1, \dots, K$ in the discretization U_k^ν of the uniform distribution U_k . The discretizations U_k^ν can be constructed either by crude Monte Carlo sampling, antithetic sampling or by quasi-Monte Carlo methods. The output is a description in an AMPL-format (see [4]) of the discretized measure P^ν in terms of the scenarios $\xi^{\nu,i}$ and the associated probabilities $p^{\nu,i}$. The discretized optimization problems were formulated in AMPL and solved with the primal-dual interior point solver of MOSEK (<http://www.mosek.com>).

4.1 Problem 1: Swing option

The first test problem can be written as

$$\begin{aligned}
& \underset{x \in \mathcal{N}(P)}{\text{minimize}} && E^P \exp \left(-\rho \sum_{k=0}^K (S_k(\xi) - X)x_k(\xi) \right) \\
& \text{subject to} && \sum_{k=0}^K x_k(\xi) \leq U, \\
& && l \leq x_k(\xi) \leq u, \quad k = 0, \dots, K, \\
& && P\text{-a.s.}
\end{aligned}$$

where ρ , X , U , l and u are positive constants and S is a real-valued stochastic price process. This models the problem of finding an optimal exercise strategy x for a “swing option” that gives the access to a total amount U of energy for a fixed unit price X over the life time $[0, K]$ of the option but restricts the usage x_k per period to lie in the interval $[l, u]$. It is assumed that at each stage, x_k will be immediately sold for the current market price S_k thus giving the revenue of $(S_k - X)x_k$. The objective is to maximize the expected utility from cumulated wealth at the terminal stage K as measured by the exponential utility function with parameter ρ .

The price process S follows a geometric Brownian motion. That is, $S_k(\xi) = \exp(\xi_k)$, where $\xi = (\xi_k)_{k=0}^K$ follows a discrete time Brownian motion

$$\Delta \xi_k = \mu + \sigma \varepsilon_k,$$

where ε_k has standard normal distribution. All the parameters of the model are given in the Appendix.

In the numerical test, the number of stages was $K = 4$. Table 1 summarizes the dimensions of Problem 1. The number n_k is the dimension of the decision variable at stage k and d_k is the dimension of the random variable in period k (the one between stages $k - 1$ and k). Table 2 gives the dimensions of its discretizations as well as computation times for increasing values of the discretization parameter L .

Figure 1 plots the optimal value of the discretizations together with the upper and lower bounds for increasing values of the discretization parameter L . As L is increased, the lower and upper bounds as well as the optimal value of the discretizations seem to converge towards a common value. This is in line with the conclusions of [14, Theorem 5], which says that the optimal values of discretizations converge to that of the original problem and that the cluster points of the first stage solutions are optimal first stage solutions of the original problem. The latter fact is reflected in the upper bound, which

Table 1: Dimensions of decision and random variables in Problem 1. The numbers n_k and d_k give the dimensions of the decision and random variables, respectively, for period k .

k	0	1	2	3	4
n_k	1	1	1	1	1
d_k	0	1	1	1	1

Table 2: Dimensions and computation times (seconds) for discretizations of Problem 1.

L	Variables	Constraints	Discretization	AMPL	MOSEK
2	31	16	0.0	0.0	0.0
4	341	256	0.0	0.0	0.1
8	4681	4096	0.0	0.2	1.0
16	69905	65536	0.5	2.9	23.0
32	1082401	1048576	7.6	34.0	508.4

decreases as the discretizations are made finer. Indeed, the upper bound is a non-biased estimator of the objective value given by the strategy obtained by solving discretized problems stage by stage. Refining the discretization thus seems to yield better first stage solutions.

The lower bound obtained with antithetic sampling is notably tighter than the one obtained with crude Monte Carlo. In the case of the upper bound, the difference is insignificant.

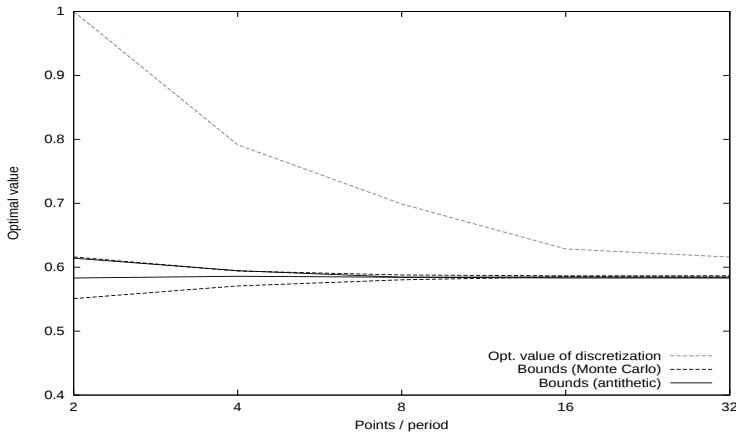


Figure 1: Optimal values of discretizations and statistical bounds for Problem 1.

4.2 Problem 2: Portfolio optimization

The second test problem may be written as

$$\begin{aligned}
& \underset{x \in \mathcal{N}(P)}{\text{minimize}} && E^P \exp \left(-\rho \sum_{j \in J} R_{K,j} h_{K-1,j} \right) \\
& \text{subject to} && \sum_{j \in J} h_{0,j} \leq 1, \\
& && \sum_{j \in J} h_{k,j} \leq \sum_{j \in J} R_{k,j} h_{k-1,j}, \quad k = 1, \dots, K, \\
& && h \geq 0, \\
& && P\text{-a.s.}
\end{aligned}$$

This models a portfolio optimization problem, where one is seeking for a nonnegative portfolio process $h = (h_k)_{k=0}^K$, where $h_k = (h_{k,j})_{j \in J}$ gives the amount of wealth invested in each asset $j \in J$ at the beginning of period k . The random number $R_{k,j}$ gives the return on an asset $j \in J$ over period k .

The set J contains 10 assets and the returns are given by $R_{k,j} = S_{k,j}/S_{k-1,j}$ where the price vector $S_k = (S_{k,j})_{j \in J}$ follows a 10-dimensional geometric Brownian motion. That is, $S_{k,j} = \exp(\xi_{k,j})$ where $\xi_k = (\xi_{k,j})_{j \in J}$ follows a 10-dimensional Brownian motion

$$\Delta \xi_k = \mu + \sigma \varepsilon_k,$$

Table 3: Dimensions of decision and random variables in Problem 2.

k	0	1	2	3
n_k	10	10	10	0
d_k	0	10	10	10

Table 4: Dimensions and computation times (seconds) for discretizations of Problem 2.

L	Variables	Constraints	Discretization	AMPL	MOSEK
2	70	7	0.0	0.0	0.0
4	210	21	0.0	0.0	0.1
8	730	73	0.0	0.0	0.2
16	2730	273	0.3	0.3	0.6
32	10570	1057	1.9	2.5	4.1
64	41610	4161	15.0	16.4	27.2

where ε_k has 10-dimensional standard normal distribution. All the parameters of the model are given in the Appendix.

In the numerical test, the number of stages was $K = 3$. Table 3 summarizes the dimensions of Problem 2 and Table 4 gives the dimensions of its discretizations as well as computation times for increasing values of the discretization parameter L .

Figure 2 plots the optimal value of the discretizations together with the upper and lower bounds for increasing values of the discretization parameter L . Again, the lower and upper bounds converge towards each other while the optimal values of the discretizations approach the common value as the discretizations are made finer. The lower bound obtained with antithetic sampling is again much tighter than the one obtained with crude Monte Carlo.

4.3 Problem 3: Optimal consumption

The third problem is a variation of the portfolio optimization problem where at each stage, one can withdraw some of the wealth for consumption. The goal is to maximize accumulated utility from consumption as measured by the negative power utility function. The problem is further complicated by

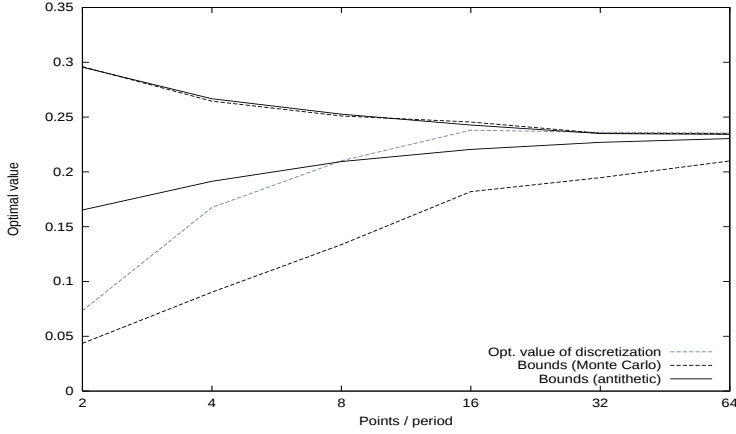


Figure 2: Optimal values of discretizations and statistical bounds for Problem 2.

adding transaction costs for buying and selling the assets. It can be written

$$\begin{aligned}
& \underset{x \in \mathcal{N}(P)}{\text{minimize}} && E^P \sum_{k=0}^K (c_k - \rho_1)^{-\rho_2} \\
& \text{subject to} && h_{0,j} \leq h_j^0 + p_{0,j} - s_{0,j}, \\
& && h_{k,j} \leq R_{k,j} h_{k-1,j} + p_{k,j} - s_{k,j}, \quad k = 1, \dots, K, \\
& && c_k \leq \sum_{j \in J} (1 - \delta_j) s_{k,j} - \sum_{j \in J} (1 + \delta_j) p_{k,j}, \quad k = 0, \dots, K-1, \\
& && c_K \leq \sum_{j \in J} R_{K,j} h_{K-1,j}, \\
& && p, s, h, c \geq 0, \\
& && P\text{-a.s.}
\end{aligned}$$

where h and R are as in the previous problem, parameter h_j^0 gives initial portfolio, $p_{k,j}$ and $s_{k,j}$ give the purchases and sales, respectively, of asset $j \in J$ at the beginning of period t , c_k gives the consumption over period t . The parameters δ_j give the proportional transaction costs for purchases and sales.

The set J contains three assets, two stock indices *SP500* and *NAS* and

Table 5: Dimensions of decision and random variables in Problem 3.

k	0	1	2	3
n_k	10	10	10	1
d_k	0	3	3	3

a money market account $E3$. The returns can be expressed as

$$R_{k,j} = \begin{cases} S_{k,j}/S_{k-1,j} & \text{if } j \in \{SP500, NAS\} \\ (1 + r_k/100)^{\frac{1}{4}} & \text{if } j = E3, \end{cases}$$

where S_j denotes the value of a stock index and r is a three-month interest rate. The vector of logarithms

$$\xi_k = (\ln S_{k,SP500}, \ln S_{k,NAS}, \ln r_k)$$

follows a VEqC-GARCH process

$$\Delta \xi_k = \mu_k + \sigma_k \varepsilon_k,$$

where

$$\mu_k = A\Delta \xi_{k-1} + \alpha\beta^T(\xi_{k-1} - \gamma) + c$$

and

$$\sigma_k^2 = C(\Delta \xi_{k-1} - \mu_{k-1})(\Delta \xi_{k-1} - \mu_{k-1})^T C^T + D\sigma_{k-1}^2 D^T + \Omega.$$

All the parameters of the model are given in the Appendix.

In the numerical test, the number of stages was $K = 4$. Table 5 summarizes the dimensions of Problem 3 and Table 6 gives the dimensions of its discretizations as well as computation times for increasing values of the discretization parameter L .

Figure 3 plots the optimal value of the discretizations together with the upper and lower bounds for increasing values of the discretization parameter L . Similar conclusions as for the earlier test problems apply except that here the improvement of the lower bound with antithetic sampling over crude Monte Carlo is even more striking.

4.4 Problem 4: Asset liability management

The fourth problem is an asset liability management model developed originally for a Finnish pension fund. Here the goal is to find an optimal portfolio

Table 6: Dimensions and computation times (seconds) for discretizations of Problem 3.

L	Variables	Constraints	Discretization	AMPL	MOSEK
2	78	36	0.0	0.0	0.0
4	274	148	0.0	0.0	0.0
8	1242	804	0.0	0.0	0.1
16	6826	5188	0.1	0.2	0.9
32	43338	36996	0.6	1.9	8.9
64	303754	278788	4.5	11.9	97.8

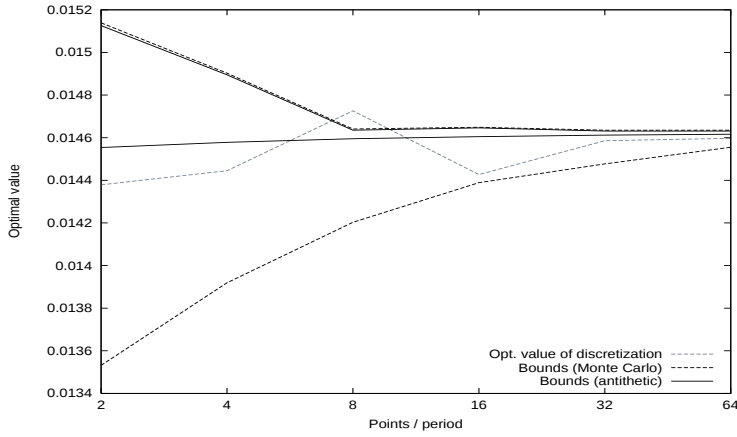


Figure 3: Optimal values of discretizations and statistical bounds for Problem 3.

strategy over a set $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ of assets, with respect to nonlinear trading costs, portfolio constraints and certain solvency targets. The problem

can be written as

$$\begin{aligned}
& \underset{x \in \mathcal{N}(P)}{\text{minimize}} && E^P \left[\sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{V_k} (w_k - \rho_1 z_{k,1} - \rho_2 z_{k,2}) + \frac{1}{V_K} (w_K - \rho_1 z_{K,1}) \right] \\
& \text{subject to} && h_{0,j} \leq h_j^0 + p_{0,j}, \quad j \in J, \\
& && h_{k,j} \leq R_{k,j} h_{k-1,j} + p_{k,j}, \quad j \in J, \quad k = 1, \dots, K \\
& && C(p_k) \leq \sum_{j \in J} D_{k,j} h_{k-1,j} + F_k, \quad k = 0, \dots, K \\
& && w_k \leq \sum_{j \in J} h_j, \quad k = 0, \dots, K-1 \\
& && l_j w_k \leq h_{k,j} \leq u_j w_k, \quad j \in J, \quad k = 0, \dots, K-1 \\
& && z_{k,1} \geq V_k - w_k, \quad k = 0, \dots, K \\
& && z_{k,2} \geq V_k - w_k - m \cdot h_k + (h_k \cdot \Sigma h_k + \epsilon)^{\frac{1}{2}}, \quad k = 1, \dots, K-1 \\
& && h, z \geq 0, \\
& && P\text{-a.s.}
\end{aligned}$$

where h and p are as in the previous problem, except that here p is allowed to be negative which corresponds to sales. The function

$$C(p) = p_1 + \sum_{j \in J \setminus \{1\}} \frac{\exp(\delta_j p_j) - 1}{\delta_j}$$

gives the total cost of purchases. The third set of constraints poses portfolio constraints. The last two constraints define “short fall” variables $z_{k,1}$ and $z_{k,2}$ that describe how much the total wealth w is short of target levels that depend on the value V of liabilities. The second target level depends also on the portfolio h according to a nonlinear formula specified by the supervisors in the Finnish pension scheme. The value of the liabilities V as well as the cash-flow F are stochastic processes whose development is described below.

The stochastic factors R , D , F and V are driven by a quarterly time series model where as the decision stages occur every four quarters. The return variables are given by

$$R_{k,j} = \begin{cases} \prod_{t=t_{k-1}+1}^{t_k} (1 + r_t/100)^{\frac{1}{4}} & \text{if } j = 1, \\ \left(\frac{1+b_{t_k}/100}{1+b_{t_{k-1}}/100} \right)^{-5} & \text{if } j = 2, \\ S_{t_k,j}/S_{t_{k-1},j} & j \in \{3, 4, 5\}, \end{cases}$$

and the dividend variables by

$$D_k = \begin{cases} \sum_{t=t_{k-1}+1}^{t_k} b_t/400 & \text{if } j = 2, \\ \sum_{t=t_{k-1}+1}^{t_k} (S_{t_k,6}/S_{t_k,5} - 0.03)/400 & \text{if } j = 5, \\ 0 & j \in \{1, 3, 4\}. \end{cases}$$

Here $t_k := 4k$ gives the date of stage k in quarters. The values of F_0 and V_0 are fixed parameters whereas for $k = 1, \dots, K$

$$F_k = q \sum_{t=t_{k-1}+1}^{t_k} W_t - e_k, \\ V_k = (1 + \bar{r})V_{k-1} + F_k,$$

where q , $\bar{r}$ and $(e_k)_{k=0}^K$ are parameters. The 8-dimensional vector

$$\xi_t = \begin{bmatrix} \ln r_t - \Delta \ln I_t \\ \ln b_t - \Delta \ln I_t \\ \ln S_{t,3} - \ln I_t \\ \ln S_{t,4} - \ln I_t \\ \ln S_{t,5} - \ln I_t \\ \ln S_{t,6} - \ln I_t \\ \ln W_t - \ln I_t \\ \ln I_t \end{bmatrix}$$

follows a VEqC-model

$$\Delta \xi_t = \mu_t + \sigma \varepsilon_t,$$

where ε_t are iid standard normal,

$$\mu_t = A \Delta \xi_{t-1} + \alpha(\beta^T \xi_{t-1} - \gamma) + c$$

and the volatility matrix $\sigma \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ is constant. All the parameters of the model are given in the Appendix.

In the numerical test, the number of stages was $K = 4$. Table 7 summarizes the dimensions of Problem 4 and Table 8 gives the dimensions of its discretizations as well as computation times for increasing values of the discretization parameter L .

Figure 4 plots the optimal value of the discretizations together with the upper and lower bounds for increasing values of the discretization parameter L . Again, one gets convergence of the bounds and the optimal values of the discretizations with the lower bound obtained with antithetic sampling being much tighter than the one obtained with crude Monte Carlo.

Table 7: Dimensions of decision and random variables in Problem 4.

k	0	1	2	3
n_k	13	13	13	2
d_k	0	32	32	32

Table 8: Dimensions and computation times (seconds) for discretizations of Problem 4.

L	Variables	Constraints	Discretization	AMPL	MOSEK
2	122	106	0.0	0.0	0.0
4	486	400	0.0	0.0	0.1
8	2558	1972	0.1	0.2	0.4
16	16110	11740	0.6	1.3	2.5
32	113102	79276	4.6	14.0	19.5
64	844686	578380	36.1	81.2	174.3

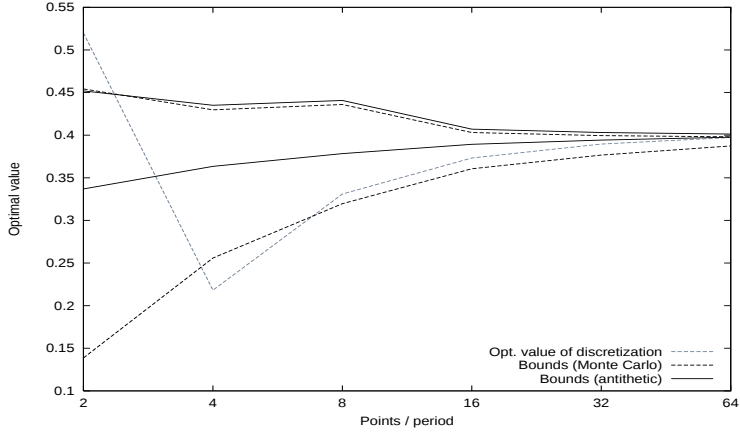


Figure 4: Optimal values of discretizations and statistical bounds for Problem 4.

Appendix: Parameters for the test problems

Problem 1

Parameters for the objective and constraints are as follows

Parameter	ρ	X	U	l	u
Value	1	1	2	0	1

Parameters for the time series model are

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \ln 1, \\ \mu &= 0, \\ \sigma^2 &= 0.2.\end{aligned}$$

Problem 2

The parameter in the objective is

$$\rho = 1.$$

Parameters for the time series model are

$$\begin{aligned}\xi_0 &= (4.16 \quad 3.81 \quad 3.54 \quad 4.15 \quad 3.30 \quad 2.99 \quad 3.44 \quad 4.42 \quad 4.24 \quad 2.96)^T, \\ \mu &= (0.084 \quad 0.071 \quad 0.041 \quad 0.087 \quad 0.071 \quad 0.09 \quad 0.089 \quad 0.080 \quad 0.083 \quad 0.072)^T,\end{aligned}$$

$$\sigma^2 = 10^{-2} \begin{pmatrix} 12.90 & 3.96 & 1.01 & 5.17 & 3.71 & 3.23 & 4.41 & 1.05 & 5.64 & 4.48 \\ 3.96 & 11.83 & 0.73 & 3.53 & 2.98 & 3.28 & 3.56 & 1.29 & 4.66 & 4.68 \\ 1.01 & 0.73 & 4.92 & 0.70 & 0.75 & 0.56 & 0.67 & 0.21 & 1.47 & 0.55 \\ 5.17 & 3.53 & 0.70 & 19.15 & 4.07 & 2.40 & 4.51 & 1.39 & 6.36 & 4.38 \\ 3.71 & 2.98 & 0.75 & 4.07 & 11.25 & 4.88 & 3.23 & 1.22 & 4.59 & 5.00 \\ 3.23 & 3.28 & 0.56 & 2.40 & 4.88 & 18.06 & 3.10 & 1.43 & 4.91 & 7.30 \\ 4.41 & 3.56 & 0.67 & 4.51 & 3.23 & 3.10 & 12.22 & 1.16 & 3.85 & 3.88 \\ 1.05 & 1.29 & 0.21 & 1.39 & 1.22 & 1.43 & 1.16 & 9.70 & 1.42 & 1.78 \\ 5.64 & 4.66 & 1.47 & 6.36 & 4.59 & 4.91 & 3.85 & 1.42 & 20.60 & 6.81 \\ 4.48 & 4.68 & 0.55 & 4.38 & 5.00 & 7.30 & 3.88 & 1.78 & 6.81 & 18.77 \end{pmatrix}.$$

Problem 3

Parameters for the objective and constraints are

Parameter	ρ_1	ρ_2	δ_{SP500}	δ_{NAS}	δ_{E3}	h_{SP500}^0	h_{NAS}^0	h_{E3}^0
Value	-1	10	0.005	0.005	0	1	1	1

Parameters for the time series model are

$$\begin{aligned}\xi_{-1} &= (7.016233 \quad 7.547945 \quad 0.582216)^T, \\ \xi_0 &= (7.030150 \quad 7.588319 \quad 0.765468)^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= (0.005000 \quad 0.007622 \quad 0.041185)^T, \\
A &= 10^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.5920 & 0 \\ 0 & 7.7350 & 55.0770 \end{pmatrix} \\
\alpha &= (0 \quad 0 \quad -0.005770)^T, \\
\beta &= (0 \quad 0 \quad 1)^T, \\
\gamma &= (0 \quad 0 \quad 1.300000)^T, \\
c &= (0.005000 \quad 0.004520 \quad -0.000387)^T, \\
C &= 10^{-2} \begin{pmatrix} 37.9891 & 0 & 0 \\ 0 & 33.0872 & 0 \\ 0 & 0 & 50.2267 \end{pmatrix}, \\
D &= 10^{-2} \begin{pmatrix} 86.7300 & 0 & 0 \\ 0 & 91.9705 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\Omega &= 10^{-2} \begin{pmatrix} 0.1050 & 0.1467 & 0.0163 \\ 0.1467 & 0.2797 & 0.0368 \\ 0.0163 & 0.0368 & 0.1783 \end{pmatrix}, \\
\sigma_0^2 &= 10^{-2} \begin{pmatrix} 0.0200 & 0.0188 & 0.0165 \\ 0.0188 & 0.0206 & 0.0373 \\ 0.0165 & 0.0373 & 0.1782 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Problem 4

Parameters for the objective and constraints are

Parameter	ρ_1	ρ_2	h_1^0	h_2^0	h_3^0	h_4^0	h_5^0	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5
Value	10	2	20	65	40	60	50	0.0002	0.002	0.002	0.02

Parameter	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
Value	0.01	0	0	0	0	1	1	0.5	1	0.45

$$\begin{aligned}
m &= (0.000972 \quad 0.005832 \quad 0.060264 \quad 0.060264 \quad 0.035964)^T, \\
\Sigma &= 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.31755240 & -0.11114334 & -0.67956214 & -0.67956214 & 0.00000000 \\ 0.11114334 & 3.89001690 & 2.37846748 & 2.37846748 & -1.66715010 \\ -0.67956214 & 2.37846748 & 145.42629710 & 145.42629710 & 30.58029612 \\ -0.67956214 & 2.37846748 & 145.42629710 & 145.42629710 & 30.58029612 \\ 0.00000000 & -1.66715010 & 30.58029612 & 30.58029612 & 71.44929000 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\epsilon = 0.01.$$

Parameters for F and V are

Parameter	V_0	F_0	q	$\bar{r}$	e_0	e_1	e_2	e_3
Value	215	25.948	0.153097	0.045	27.90	29.11	30.18	31.55

Parameters for the time series model are

$$\xi_{-1} = (0.353101 \quad 1.150000 \quad 1.723809 \quad 1.002339 \quad 0.101330 \quad 1.911712 \quad 4.879275 \quad 0.249151)^T,$$

$$\xi_0 = (0.313223 \quad 1.200000 \quad 1.811451 \quad 1.083672 \quad 0.102742 \quad 1.914840 \quad 4.878644 \quad 0.254137)^T,$$

$$A = 10^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 70.3070 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75.0830 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 98.4630 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 85.3790 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 10^{-2} \begin{pmatrix} -6.9950 & 0 & 0 \\ 0 & -20.3310 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4625 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0475 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = (-0.213706 \quad 0.223144 \quad 1.945910)^T,$$

$$c = (0 \quad 0 \quad 0.016000 \quad 0.011000 \quad 0.001039 \quad 0.000872 \quad 0.000061 \quad 0.000731)^T,$$

$$\sigma^2 = 10^{-4} \begin{pmatrix} 2459.3665 & 2474.6456 & -44.8775 & -88.3291 & 14.5393 & 6.6564 & -6.3217 & 7.2190 \\ 2474.6456 & 2591.4208 & -18.6423 & -74.1652 & 20.4939 & 6.2654 & -6.4979 & 7.5418 \\ -44.8775 & -18.6423 & 253.0327 & 122.0457 & 5.1302 & -0.3554 & 0.1016 & -0.0265 \\ -88.3291 & -74.1652 & 122.0457 & 94.3365 & 2.8128 & 0.0872 & 0.2266 & -0.0933 \\ 14.5393 & 20.4939 & 5.1302 & 2.8128 & 3.5865 & 0.1731 & -0.0452 & 0.0106 \\ 6.6564 & 6.2654 & -0.3554 & 0.0872 & 0.1731 & 0.1939 & -0.0174 & 0.0046 \\ -6.3217 & -6.4979 & 0.1016 & 0.2266 & -0.0452 & -0.0174 & 0.0167 & -0.0198 \\ 7.2190 & 7.5418 & -0.0265 & -0.0933 & 0.0106 & 0.0046 & -0.0198 & 0.0618 \end{pmatrix}.$$

Acknowledgments We would like to thank doctor Matti Koivu for fruitful discussions and for implementing essential parts of the discretization routine.

References

- [1] J. Blomvall and A. Shapiro. Solving multistage asset investment problems by the sample average approximation method. *Math. Programming, Series B*, to appear.
- [2] A. Chiralaksanakul. *Monte Carlo methods for multi-stage stochastic programs*. PhD thesis, University of Texas at Austin, 2003, Austin, Texas, 2003.
- [3] A. Chiralaksanakul and D. Morton. Assessing policy quality in multi-stage stochastic programming. *Stochastic Programming E-Print Series*, 2004(12).
- [4] R. Fourer, D. M. Gay, and B. W. Kernighan. *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*. Duxbury Press, 2nd edition, 2002.
- [5] K. Frauendorfer. Barycentric scenario trees in convex multistage stochastic programming. *Math. Programming*, 75(2, Ser. B):277–293, 1996. Approximation and computation in stochastic programming.
- [6] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.
- [7] H. Heitsch and R. W. Römisch. Scenario tree modelling for multistage stochastic programs. *Preprint 296, DFG Research Center Matheon "Mathematics for key technologies"*, 2005.

- [8] H. Heitsch and Römisch W. Stability and scenario trees for multi-stage stochastic programs. *Preprint 324, DFG Research Center Matheon "Mathematics for key technologies"*, 2006.
- [9] P. Kall and J. Mayer. *Stochastic linear programming*. International Series in Operations Research & Management Science, 80. Springer-Verlag, New York, 2005. Models, theory, and computation.
- [10] H. Niederreiter. *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, volume 63 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.
- [11] Harald Niederreiter and Denis Talay, editors. *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2004*, Berlin, 2006. Springer-Verlag.
- [12] P. Olsen. Discretizations of multistage stochastic programming problems. *Math. Programming Stud.*, (6):111–124, 1976. Stochastic systems: modeling, identification and optimization, II (Proc. Sympos., Univ. Kentucky, Lexington, Ky., 1975).
- [13] T. Pennanen. Epi-convergent discretizations of multistage stochastic programs. *Math. Oper. Res.*, 30(1):245–256, 2005.
- [14] T. Pennanen. Epi-convergent discretizations of multistage stochastic programs via integration quadratures. *Math. Programming, Series B*, to appear.
- [15] T. Pennanen and M. Koivu. Integration quadratures in discretization of stochastic programs. *Stochastic Programming E-Print Series*, 2002.
- [16] G. Pflug. Scenario tree generation for multiperiod financial optimization by optimal discretization. *Math. Program.*, 89(2, Ser. B):251–271, 2001. Mathematical programming and finance.
- [17] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1992. The art of scientific computing.
- [18] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. Continuous versus measurable recourse in N -stage stochastic programming. *J. Math. Anal. Appl.*, 48:836–859, 1974.

- [19] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. Nonanticipativity and L^1 -martingales in stochastic optimization problems. *Math. Programming Stud.*, (6):170–187, 1976. Stochastic systems: modeling, identification and optimization, II (Proc. Sympos., Univ Kentucky, Lexington, Ky., 1975).
- [20] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. Measures as Lagrange multipliers in multistage stochastic programming. *J. Math. Anal. Appl.*, 60(2):301–313, 1977.
- [21] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. The optimal recourse problem in discrete time: L^1 -multipliers for inequality constraints. *SIAM J. Control Optimization*, 16(1):16–36, 1978.
- [22] A. Shapiro. Inference of statistical bounds for multistage stochastic programming problems. *Math. Methods Oper. Res.*, 58(1):57–68, 2003.
- [23] A. Shapiro. On complexity of multistage stochastic programs. *Oper. Res. Lett.*, 34(1):1–8, 2006.
- [24] I. H. Sloan and S. Joe. *Lattice methods for multiple integration*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994.
- [25] I. M. Sobol'. The distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *U.S.S.R. Computational Math. And Math. Phys.*, (4):86–112, 1967.

A stochastic programming model for asset liability management of a Finnish pension company

Petri Hilli · Matti Koivu · Teemu Pennanen ·
Antero Ranne

© Springer Science + Business Media, LLC 2006

Abstract This paper describes a stochastic programming model that was developed for asset liability management of a Finnish pension insurance company. In many respects the model resembles those presented in the literature, but it has some unique features stemming from the statutory restrictions for Finnish pension insurance companies. Particular attention is paid to modeling the stochastic factors, numerical solution of the resulting optimization problem and evaluation of the solution. Out-of-sample tests clearly favor the strategies suggested by our model over static fixed-mix and dynamic portfolio insurance strategies.

Keywords Stochastic optimization · Asset-liability management · Econometric modeling · Discretization

1 Introduction

Stochastic programming has proven to be an efficient approach in designing effective strategies in wealth- and asset liability management in practice. This is due to its ability to cope with the dynamics and complex constraint structures usually inherent in such problems. In principle, stochastic programming is not tied to any particular form of objective function or model

*Financial support from the Foundation for the Helsinki School of Economics under grants number 9981114 and 9981117 for P. Hilli and M. Koivu is gratefully acknowledged.

†The work of T. Pennanen was supported by Finnish Academy under contract no. 3385

P. Hilli · T. Pennanen (✉)

Department of Business Technology, Helsinki School of Economics, PL 1210, 00101 Helsinki, Finland
e-mail: pennanen@hse.fi

M. Koivu

Risk Management Division, European Central Bank, D-60311 Frankfurt am Main, Germany

A. Ranne

Actuarial Department, Ilmarinen Mutual Pension Insurance Company
e-mail: antero.ranne@ilmarinen.fi

of the stochastic factors as long as the distribution of the stochastic factors is independent of the decision variables in the model. Successful applications of stochastic programming to asset liability management have been reported e.g. in Nielsen and Zenios (1996), Cariño et al. (1998), Cariño and Ziemba (1998), Høyland (1998), Consigli and Dempster (1998), Kouwenberg (2001), and Geyer et al. (2003). See also the collections Ziemba and Mulvey (1998) and Zenios and Ziemba (2004) and the references therein. For a general introduction to stochastic programming we refer the reader to the official (COSP) stochastic programming site: www.stoprog.org.

This paper describes a stochastic programming model and its computer implementation for asset liability management of a Finnish pension insurance company. Finnish pension companies manage large investment funds and, like most pension companies in Europe, they are facing a large number of retiring policyholders at around 2010–2020. Our model addresses a long term dynamic investment problem where the aim is to cover the uncertain future liabilities with dynamic investment strategies. The assets are considered as the aggregate investment classes of cash, bonds, stocks, property and loans to policyholders. In addition to investment decisions, our model looks for optimal bonus payments and it takes explicitly into account various portfolio and transaction restrictions as well as some legal restrictions coming from the intricate pension system in Finland which is based on the defined benefit rule. The legal restrictions form a unique part of the model not present in earlier applications of stochastic programming.

We pay particular attention to describing the uncertain factors in the model which include investment returns, cash-flows, and the technical reserves used in the definition of the statutory restrictions. This is important since the solution of a stochastic programming model depends usually heavily on the underlying model for the stochastic factors. We use the stochastic model for assets and liabilities developed in Koivu et al. (). This model is based on a *vector equilibrium correction* model which, in addition to short term dynamics, takes into account long term equilibrium relations between certain economic factors (Engle and Granger, 1987).

Stochastic models such as the one in Koivu et al. () are based on an infinite sample spaces, which result in infinite dimensional optimization problems. We solve these problems numerically through discretization as described in Pennanen and Koivu (2002) and analyzed in (Pennanen). This is convenient for the user who only needs to come up with an appropriate econometric description of the stochastic factors. The discretization and numerical solution of the discretized models are fully automated and hidden from the user.

The model was implemented and tested against static fixed-mix and dynamic portfolio insurance strategies. Fixed-mix strategies are simple decision rules that always rebalance the investment portfolio to maintain fixed asset proportions. Portfolio insurance strategies are based on the constant proportion portfolio insurance framework of Perold and Sharpe (1988) and Black and Jones (1988), where the proportion of risky assets is kept as a constant multiple of the difference between the portfolio value and a protective floor. If the portfolio value hits or falls below the floor, all the funds are invested in less risky assets.

These decision strategies are by no means realistic models for the behavior of a real pension insurance company. However, they are often used for various simulation purposes in practice, which motivates their use as benchmarks. Other, more sophisticated but computation-intensive, choices of benchmarks have been used in Høyland (1998), Kouwenberg (2001); see also Fleten et al. (2002). We used the out-of-sample testing procedure recommended e.g. by Dardis and Mueller (2001) of Tillinghast-Towers Perrin. In the tests, the strategies based on our stochastic programming model clearly outperform both the fixed-mix and portfolio insurance strategies. Similar results have been obtained with the more sophisticated benchmarks in Høyland (1998); Kouwenberg (2001); Fleten et al. (2002).

The rest of the paper is organized as follows. A mathematical model of the ALM problem is presented in Section 2. Section 3 outlines the model for the underlying stochastic factors. Section 4 describes the procedure used for discretization of the optimization model. Section 5 outlines a computer implementation of our model and reports the results of numerical tests.

2 The optimization model

Our model is a multistage stochastic program where a sequence of decisions (asset allocations etc.) is interlaced with a sequence of observations of random variables (asset returns etc.). At each stage, decisions are made based on the information revealed up to that point, so the decision variables at a stage are functions of the random variables observed up to that stage. This kind of interdependent dynamics of information and decisions is typical in sequential decision making under uncertainty, which is what ALM and many other wealth management problems are; see for example Ziemba and Mulvey (1998) or Föllmer and Schied (2002).

The decision stages are indexed by $t = 0, 1, \dots, T$, where $t = 0$ denotes the present time, and the set of assets is indexed by $j \in J$, with

$$J = \{\text{cash, bonds, stocks, property, loans to policyholders}\}.$$

The decision variables characterize the asset management strategy as well as the company's solvency situation and the bonus strategy. Uncertainties result from random future investment returns as well as from random cash flows and technical reserves described below. There are several constraints stemming from the regulations of the Finnish pension system. The objective is to optimize the development of the company's solvency situation as described by the Ministry of Social Affairs and Health as well as the amount of bonuses paid to policyholders.

We will first describe the asset management model, followed by the model of statutory restrictions and finally the objective. Decision variables are random variables for all t except for $t = 0$. For parameters, randomness will be indicated explicitly.

2.1 Asset management

Asset management constitutes a central part of the model. The following formulation is fairly standard in asset management applications of stochastic programming.

Inventory constraints describe the dynamics of holdings in each asset class:

$$\begin{aligned} h_{0,j} &= h_j^0 + p_{0,j} - s_{0,j} \\ h_{t,j} &= R_{t,j}h_{t-1,j} + p_{t,j} - s_{t,j} \quad t = 1, \dots, T-1, \quad j \in J, \end{aligned}$$

where

$$h_j^0 = \text{initial holdings in asset } j,$$

$$R_{t,j} = \text{return on asset } j \text{ over period } [t-1, t] \text{ (random)}$$

are parameters, and

$$p_{t,j} = \text{(nonnegative) purchases of asset } j \text{ at time } t,$$

$$s_{t,j} = \text{(nonnegative) sales of asset } j \text{ at time } t,$$

$$h_{t,j} = \text{holdings in asset } j \text{ in period } [t, t + 1]$$

are decision variables. As usual, we do not allow portfolio rebalancing at the horizon, which is why the index t goes only up to $T - 1$ in the inventory constraints. Also, the company does not have control over the loans since, according to the Finnish law the policyholders have the right to borrow money from the company against their paid pension premiums. The amount invested in loans is thus determined by the policyholders. Holdings in loans are stochastic and we will assume them to be proportional to the technical reserves; see Section 2.2.1 below.

Budget constraints guarantee that the total expenses do not exceed revenues:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} (1 + c_j^p) p_{0,j} + H_{-1} &\leq \sum_{j \in J} (1 - c_j^s) s_{0,j} + F_0, \\ \sum_{j \in J} (1 + c_j^p) p_{t,j} + \tau_t H_{t-1} &\leq \sum_{j \in J} (1 - c_j^s) s_{t,j} + \sum_{j \in J} D_{t,j} h_{t-1,j} + F_t \quad t = 1, \dots, T - 1, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} c_j^p &= \text{transaction cost for buying asset } j, \\ c_j^s &= \text{transaction cost for selling asset } j, \\ \tau_t &= \text{length of period } [t - 1, t] \text{ in years,} \\ H_{-1} &= \text{transfers to the bonus reserve a year before stage } t = 0, \\ D_{t,j} &= \text{dividend paid on asset } j \text{ over period } [t - 1, t] \text{ (random),} \\ F_t &= \text{cash flows in period } [t - 1, t] \text{ (random)} \end{aligned}$$

are parameters and

$$H_t, \quad t = 0, \dots, T - 1 = \text{transfers to the bonus reserve per year during period } [t, t + 1]$$

are decision variables. The net cash flow F_t is the difference between pension contributions and expenditures during period $[t - 1, t]$. The company can pay a proportion of its accumulated wealth as bonuses to its policyholders. These bonuses are paid as reductions of the pension contributions. The amount of the total bonuses is determined at the end of each year, and the sum is transferred to the bonus reserve. The whole bonus reserve is then paid out during the following year. For periods longer than one year, we assume that H_t is kept constant throughout the period, hence $\tau_t H_{t-1}$ gives the value of bonuses paid to policyholders during period $[t - 1, t]$.

Portfolio constraints give bounds for the allowed range of portfolio weights:

$$l_j w_t \leq h_{t,j} \leq u_j w_t \quad t = 0, \dots, T - 1, \quad j \in J,$$

where

$$w_t = \sum_{j \in J} h_{t,j} = \text{total wealth at time } t = 0, \dots, T - 1,$$

Table 1 Lower and upper bounds for investment proportions

j	l_j	u_j
Cash	0.01	1
Bonds	0	1
Stocks	0	0.5
Property	0	0.4

Table 2 Upper bounds for transactions

j	b_j^p	b_j^s
Cash	0.2	0.2
Bonds	0.2	0.2
Stocks	0.2	0.2
Property	0.01	0.01

and

l_j = lower bound for the proportion of w_t in asset j ,

u_j = upper bound for the proportion of w_t in asset j

are parameters whose values are given in Table 1. The upper bounds for stocks and property are statutory restrictions. The lower bound for cash investments is set to guarantee sufficient liquidity.

Note that the total wealth w_t at stage $t = 0, \dots, T - 1$ is computed after portfolio rebalancing. At the horizon, there is no rebalancing so we define it as

$$w_T = \sum_{j \in J} (R_{T,j} + D_{T,j}) h_{T-1,j} + F_T - \tau_T H_{T-1}.$$

Transaction constraints bound the sales and purchases to a given fraction of w_t :

$$p_{t,j} \leq \tau_t b_j^p w_t \quad t = 0, \dots, T - 1, \quad j \in J,$$

$$s_{t,j} \leq \tau_t b_j^s w_t \quad t = 0, \dots, T - 1, \quad j \in J,$$

where

b_j^p = upper bound for purchases of asset j per year as a fraction of total wealth,

b_j^s = upper bound for sales of asset j per year as a fraction of total wealth

are parameters. The values of b_j^p and b_j^s are displayed in Table 2. The tight rebalancing restrictions for property are set because of illiquidity of the Finnish property markets. For other asset classes the yearly rebalancing is restricted to be at most 20% of the total wealth. These restrictions model the policies of the company as well as the requirement that the size of transactions should be kept at levels that do not affect market prices.

2.2 Statutory restrictions

The statutory restrictions for Finnish pension insurance companies are quite strict, and they form a unique part of our stochastic programming model. Besides imposing constraints on the decision variables, these rules form the basis for defining the objective function in our model.

2.2.1 Solvency capital

The Finnish pension insurance companies are obliged to comply with several restrictions described in the legislation, government decrees or regulations given by the Ministry of Social Affairs and Health. A fundamental restriction is that the assets of a company must always cover its *technical reserves* L_t , which corresponds to the present value of future pension expenditure discounted with the so called “technical interest rate”. A detailed description for determining the value of L_t is given in Koivu et al. () The assets include, besides the total amount of investments w_t , a transitory item of the net amount of other debts and credits in the balance sheet. This relatively small amount is calculated approximately as a fixed proportion c^G of the technical reserves. The difference

$$C_t = w_t + c^G L_t - L_t = w_t - (1 - c^G) L_t$$

of assets and the technical reserves is called the *solvency capital*. If at any time, C_t becomes negative, the company is declared bankrupt.

2.2.2 Solvency limits

Besides bankruptcy ($C_t \leq 0$), there are several target levels that have been set to characterize the pension insurance companies’ solvency situation. These levels form an early warning system, so that the company and the supervising authorities can take action before a bankruptcy actually happens. A fundamental concept in the system is the *solvency border* $\tilde{B}_t$, defined in (1) below. If the solvency capital C_t falls below this limit the financial position is considered to be at risk, and the company is required to present to the authorities a plan for recovering a safe position. In addition, the company is not allowed to give any bonuses to its policyholders.

The target zone for the ratio $C_t / \tilde{B}_t$ is $[2, 4]$. In this zone, the financial position of a company is considered to be quite good. There is still discussion about how strictly the upper limit should be observed (in practice, no company has yet exceeded the upper limit). Therefore, we will ignore the upper limit in the model.

The concept of the solvency border corresponds to the solvency requirements in the European Union (EU) insurance directives. There is, however, an essential difference in the calculation method. The Finnish solvency border is based on the investment portfolio of a company. The fluctuation of the solvency capital is mainly caused by the investment market, and therefore the risk of going bankrupt is strongly dependent of the company’s investment risk. The starting point of the Finnish system is that the probability of ruin in one year at the solvency border should be approximately 2.5%, and therefore the value of the border is required to be dependent on the investment portfolio. In contrast, the EU directives take no account of the company’s investments. It is widely regarded that the EU regulations are insufficient, and a project is now established to renew the EU solvency requirements. The

solvency border $\tilde{B}_t$ is given by

$$\tilde{B}_t = \left(a \sum_{j \in J} m_j h_{t,j} + b \sqrt{\sum_{j,k \in J} \sigma_{j,k} h_{t,j} h_{t,k}} \right) \frac{(L_t + H_t)}{w_t}, \quad (1)$$

where $a = -0.972/100$, $b = 1.782/100$, and the parameters

$$m = \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.66 \\ 6.20 \\ 3.70 \\ 0.72 \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} 0.93 & 0.01 & 3.08 & 1.05 & -0.02 \\ 0.01 & 11.47 & 12.80 & -3.62 & 11.19 \\ 3.08 & 12.80 & 460.51 & 91.50 & 9.67 \\ 1.05 & -3.62 & 91.50 & 176.55 & -1.31 \\ -0.02 & 11.19 & 9.67 & -1.31 & 11.18 \end{bmatrix}$$

give the means and covariances for the asset classes (in the order: cash, bonds, stocks, property, loans to policyholders), according to the government decree, of one-year rate of returns over the technical interest rate. For asset classes like stocks, the parameter $\sigma_{j,j}$ is substantially larger than for safer classes like bonds. In reality, the values of m and σ are not fixed for eternity, but are updated by the Ministry of Social Affairs and Health on an irregular basis. The current values were set in 1999. We have decided to keep the values m and σ fixed in our optimization model partly because of the infrequent updating and also because any uncertainty in these parameters would be hard to model. Note that $\tilde{B}_t$ is a nonconvex function of the variables in the model.

2.2.3 Upper bound for bonuses

Finnish pension insurance companies compete with each other by paying out bonuses to their policyholders. To attract new customers companies would like to keep the amount of bonuses very high, but because the pension system is statutory, the government has aimed to restrict the amount of bonuses so that a sufficient proportion of the assets is preserved in the system to guarantee future pensions. Therefore, the Ministry of Social Affairs and Health imposes a formula for the maximum amount of each year's bonus transfers. The maximum depends on the solvency capital C_t and the solvency border $\tilde{B}_t$ of the company according to the formula

$$\tilde{H}_t^{\max} = \phi(C_t/\tilde{B}_t)(C_t - \tilde{B}_t)$$

where $\phi(z)$ is a piecewise linear function which has the minimum value of 0 when $z \leq 1$ and the maximum value of 0.04 when $z \geq 4$. It follows that $\tilde{H}_t^{\max}$ is also a nonconvex function of the variables in the model.

2.2.4 Convex approximations

In the optimization model, the nonconvex solvency border is replaced by

$$B_t = a \sum_{j \in J} m_j h_{t,j} + b \sqrt{\sum_{j,k \in J} \sigma_{j,k} h_{t,j} h_{t,k}},$$

which is convex in the variables. We have $B_t \geq \tilde{B}_t$ since $(L_t + H_t)/w_t \leq 1$ unless the company is bankrupt. Replacing $\tilde{B}_t$ by B_t in the model, makes the constraints in the model more restrictive, so we will stay on the safe side, except when the company is bankrupt. In the case of bankruptcy, the solvency border is underestimated by a factor of $(L_t + H_t)/w_t$.

We will also replace the nonconvex function $\tilde{H}_t^{\max}$ by a convex approximation, namely,

$$H_t^{\max} = 0.03 \max\{C_t - B_t, 0\}.$$

This is based on the fact that the historical average of $\phi(z)$ has been close to 0.03.

2.3 Objective function

There are many possibilities for measuring the performance of a company. Natural candidates would be expected utility of wealth or solvency capital under various utility functions. Here, we will describe a utility function that takes explicitly into account the unique features of the Finnish pension system.

As described in Section 2.2.2, the Ministry of Social Affairs and Health measures pension insurance companies' solvency situation by the ratio $C_t/\tilde{B}_t$ of the solvency capital and the solvency border. The Ministry defines four zones according to which companies' solvency situation is classified:

$$C_t/\tilde{B}_t \in [2, \infty) : \text{target}$$

$$C_t/\tilde{B}_t \in [1, 2) : \text{below target}$$

$$C_t/\tilde{B}_t \in [0, 1) : \text{crisis}$$

$$C_t/\tilde{B}_t \in (-\infty, 0) : \text{bankrupt.}$$

We replace $\tilde{B}_t$ throughout by its convex approximation B_t given above, and we define three shortfall variables:

$$\begin{aligned} SF_{t,1} &\geq 2B_t - C_t & t = 1, \dots, T-1, \\ SF_{t,2} &\geq B_t - C_t + H_t/0.03 & t = 1, \dots, T-1, \\ SF_{t,3} &\geq -C_t & t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

each of which gives the amount by which a zone is missed. These will be penalized in the objective function. The inequality for $SF_{t,2}$ incorporates the constraint

$$H_t \leq H_t^{\max}$$

for bonus transfers. The penalty for $SF_{t,2}$ will be chosen large enough to guarantee that, at the optimum, the upper bound is satisfied.

For $t = 0, \dots, T-1$, the state of the company will be evaluated by the following utility function

$$u(C_t, B_t, H_t, L_t) = C_t/L_t - \sum_{z=1}^3 \gamma_z SF_{t,z}/L_t + u^b(H_t/L_t),$$

where γ_z are positive parameters and u^b is a nondecreasing concave function that will be specified according to the preferences of the company. However, the choice of u^b has to be made in accordance with the penalty parameter γ_2 in order to guarantee that the upper bound for H_t is not violated at the optimum. At stage T , the utility is measured by

$$u_T(C_T, L_T) = C_T/L_T - \gamma_3 SF_{T,3}/L_T.$$

The overall objective function in our model is the discounted expected utility

$$E^P \left\{ \sum_{t=1}^{T-1} d_t u(C_t, B_t, H_t, L_t) + d_T u_T(C_T, L_T) \right\},$$

where d_t is the discount factor for stage t . The problem is to maximize this expression over all the decision variables and subject to all the constraints described above.

2.4 Problem summary

Deterministic parameters:

h_j^0 = initial holdings in asset j ,

c_j^p = transaction cost for buying asset j ,

c_j^s = transaction cost for selling asset j ,

l_j = lower bound for wealth in asset j as a fraction of total wealth,

u_j = upper bound for wealth in asset j as a fraction of total wealth,

b_j^p = upper bound for purchases of asset j per year as a fraction of total wealth,

b_j^s = upper bound for sales of asset j per year as a fraction of total wealth,

c^G = the amount of transitory items as a fraction of the technical reserves,

a = the (negative) weight for the return component in the solvency border,

b = the weight for the standard deviation component in the solvency border,

m_j = mean yearly return of asset j according to the government decree,

$\sigma_{j,k}$ = covariance of one-year returns according to the government decree,

τ_t = length of period $[t - 1, t]$ in years,

γ_z = penalty parameters in the objective function,

Stochastic parameters:

$R_{t,j}$ = return on asset j over period $[t - 1, t]$,

$D_{t,j}$ = dividend paid on asset j over period $[t - 1, t]$,

F_t = cash flows from period $[t - 1, t]$,

L_t = technical reserves at time t ,

Decision variables:

$h_{t,j}$ = holdings in asset j from period t to $t + 1$,

$p_{t,j}$ = purchases of asset j at time t ,

$s_{t,j}$ = sales of asset j at time t ,

w_t = total wealth at time t ,

H_t = transfers to bonus reserve at time t ,

C_t = solvency capital at time t ,

B_t = solvency border at time t ,

$SF_{t,z}$ = shortfall from zone z at time t .

Our stochastic programming model is

$$\text{maximize } E^P \left\{ \sum_{t=1}^{T-1} d_t u(C_t, B_t, H_t, L_t) + d_T u_T(C_T, L_T) \right\}$$

$$h_{0,j} = h_j^0 + p_{0,j} - s_{0,j},$$

$$h_{t,j} = R_{t,j} h_{t-1,j} + p_{t,j} - s_{t,j},$$

$$p_{t,j}, s_{t,j} \geq 0,$$

$$\sum_{j \in J} (1 + c_j^p) p_{0,j} + H_{-1} \leq \sum_{j \in J} (1 - c_j^s) s_{0,j} + F_0,$$

$$\sum_{j \in J} (1 + c_j^p) p_{t,j} + \tau_t H_{t-1} \leq \sum_{j \in J} (1 - c_j^s) s_{t,j} + \sum_{j \in J} D_{t,j} h_{t-1,j} + F_t,$$

$$w_t = \sum_{j \in J} h_{t,j},$$

$$l_j w_t \leq h_{t,j} \leq u_j w_t,$$

$$p_{t,j} \leq \tau_t b_j^p w_t,$$

$$s_{t,j} \leq \tau_t b_j^s w_t,$$

$$C_t = w_t - (1 - c^G) L_t,$$

$$B_t \geq a \sum_{j \in J} m_j h_{t,j} + b \sqrt{\sum_{j,k \in J} \sigma_{j,k} h_{t,j} h_{t,k}},$$

$$SF_{t,1} \geq 2B_t - C_t,$$

$$SF_{t,2} \geq B_t - C_t + 100H_t/3,$$

$$SF_{t,3} \geq -C_t,$$

$$\text{for all } t = 1, \dots, T-1, \quad j \in J,$$

$$w_T = \sum_{j \in J} (R_{T,j} + D_{T,j}) h_{T-1,j} + F_T - \tau_T H_{T-1}.$$

$$C_T = w_T - (1 - c^G) L_T,$$

$$SF_{T,3} \geq -C_T,$$

$$(h, p, s, w, H, C, B, SF) \in \mathcal{N}$$

where P is the probability distribution of the random parameters, E^P denotes the expectation operator, and the constraints are required to hold almost surely with respect to P . The symbol $\mathcal{N}$ stands for the subspace of *nonanticipative* decision rules, i.e. the set of strategies where the decision at each stage depends only on the random variables whose values have been observed by that stage.

Our model is a convex optimization problem that is nonlinear both in the objective and the constraints. There are 19 decision variables in each stage $t = 0, \dots, T - 1$ (recall that for loans to policyholders, $h_{t,j}$, $p_{t,j}$ and $s_{t,j}$ are determined by L_t) and 3 in the last stage.

The probability distribution P of the random parameters is an important part of the model, and the solution will depend on it in an essential way. We assume that the random parameters follow the stochastic model developed in Koivu et al. () This model is briefly outlined in the following section. Since this model has continuous distributions, the resulting optimization problem is infinite-dimensional. Solutions of the problem are then sought numerically through discretization. As in Pennanen and Koivu (2002), the discretization is obtained by approximating the continuous probability measure by a discrete one. This is described in Section 4.

3 Modeling the stochastic factors

The stochastic factors in the optimization model are first expressed in terms of seven economic variables, namely short term interest rate sr , long term bond yield br , stock price index S , dividend index Div , property price index P , rental index $Rent$ and wage index W . These variables are then modeled by a time series model.

The formulas for calculating $R_{t,j}$ and $D_{t,j}$ for each asset class are displayed in Table 3, where τ_t denotes the length of the time period in years and the parameter D_M denotes the average duration of the company's bond portfolio.

The return for cash investments is approximated by the geometric average of the short term interest rate during the holding period. The formula for bond returns is based on a duration

Table 3 Return and dividend formulas

Asset class	$R_{t,j}$	$D_{t,j}$
Cash	$((1 + sr_t)(1 + sr_{t-1}))^{\frac{\tau_t}{2}}$	1
Bonds	$\left(\frac{1 + br_{t-1}}{1 + br_t}\right)^{D_M}$	$\frac{1}{2}(br_{t-1} + br_t)\tau_t$
Stocks	$\frac{S_t}{S_{t-1}}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{Div_{t-1}}{S_{t-1}} + \frac{Div_t}{S_t}\right)\tau_t$
Property	$\frac{P_t}{P_{t-1}}$	$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{Rent_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{Rent_t}{P_t}\right) - 0.03\right)\tau_t$
Loans	1	$\frac{1}{2}(br_{t-1} + br_t)\tau_t$

approximation as in Campbell et al. (1997), Chapter 10. The parameter D_M is set equal to five years. The dividends for stock and property investments present the average dividend and rental yield, respectively, during the holding period. For property investments the maintenance costs, which are assumed to be a constant 3% of the property value, are deducted from the rental yield. Similarly to bonds, the cash income for loans is approximated by an average of bond yield. This is based on the fact that the interest on newly given loans is usually set equal to the current bond yield. The return for loans is equal to one because these instruments are not traded in the market.

The Finnish earnings-related pension scheme follows the defined benefit principle, where the pension insurance company guarantees the pension payments which are tied to the development of the policyholder's salaries. It follows that, the technical reserves L and cash flows F depend on policyholder's wages and population dynamics. These are assumed independent, so that their development can be modeled separately. The values of L and F depend also on the technical interest rate, which determines the total growth rate for the reserves. In the model, the technical interest rate is calculated based on recent asset returns and it is an important part of the model because, to a great extent, it determines the correlations between the investment variables and the reserves. The development of wages is described by the general Finnish wage index. For a more detailed description of the development of L and F , see Koivu et al. ()

The quarterly development of

$$x_t = \begin{bmatrix} \ln sr_t \\ \ln br_t \\ \ln S_t \\ \ln Div_t \\ \ln P_t \\ \ln Rent_t \\ \ln W_t \end{bmatrix}$$

will be modeled with a Vector Equilibrium Correction (VEqC) model, popularized by Engle and Granger (1987) and Johansen (1995). During the last decade VEqC models have been widely used in modeling and forecasting economic and financial time series, see e.g. Campbell and Shiller (1987); Clements and Hendry (1998, 1999) and Anderson et al. (2000). We consider a VEqC model

$$\Delta_\delta x_t = \sum_{i=1}^k A_i \Delta_\delta x_{t-i} + \alpha(\beta' x_{t-1} - \mu) + \epsilon_t, \quad (2)$$

where $A_i \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$, $\beta \in \mathbb{R}^{7 \times l}$, $\mu \in \mathbb{R}^l$, $\alpha \in \mathbb{R}^{7 \times l}$, Δ_δ denotes the shifted difference operator

$$\Delta_\delta x_t := \Delta x_t - \delta$$

with $\delta \in \mathbb{R}^7$, and ϵ_t are independent normally distributed random variables with zero mean and variance matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$. When the model is stationary the parameter vector δ determines the average drift for the time series. The term $\alpha(\beta' x_{t-1} - \mu)$ takes into account the long-term behavior of x_t around statistical equilibria described by the linear equations $\beta' x = \mu$. It is

assumed that, in the long run,

$$E[\beta'x_t] = \mu,$$

and that if x_t deviates from the equilibria it will tend to move back to them. The matrix α determines the speed of adjustment toward the equilibria. In a sense, VEqC-models incorporate long-run equilibrium relationships (often derived from economic theory) with short-run dynamic characteristics deduced from historical data.

We take δ and μ as user specified parameters. This enables incorporation of expert information in specifying the expected growth rates for x_t as well as long term equilibrium values for such quantities as mean reversion levels, interest rate spread and dividend yield. In particular, this gives control over mean returns which have been shown (in the context of the Markowitz model) to have a big impact on the optimal portfolio choice, see Chopra and Ziemba (1993). The appropriate lag-length k and the remaining parameters are estimated from quarterly data from Finland and the EU-area. The estimated parameter values used in the numerical tests of Section 5 are given in the Appendix. For a more detailed description of the model; see Koivu et al. ()

4 Discretization

In our optimization model, we are interested in the conditional distributions of x_{t+h} , given x_t , typically for $h \geq 4$. This can be calculated conveniently as follows. After specifying the model (2), we write it as a Vector Auto-Regressive (VAR) model in levels

$$x_t = (I + A_1 + \Gamma)x_{t-1} + \sum_{i=2}^k (A_i - A_{i-1})x_{t-i} - A_k x_{t-k-1} + c + \epsilon_t,$$

where $\Gamma = \alpha\beta'$ and $c = -\alpha\mu + (I - \sum_{i=1}^k A_i)\delta$. This, in turn, can be written in the companion form

$$\bar{x}_t = \bar{A}\bar{x}_{t-1} + \bar{c} + \bar{\epsilon}_t,$$

where

$$\bar{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ \vdots \\ x_{t-k} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} I + A_1 + \Gamma & A_2 - A_1 & \cdots & A_k - A_{k-1} & -A_k \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\epsilon}_t = \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

It follows that

$$\bar{x}_{t+h} = \bar{A}^h \bar{x}_t + \sum_{i=1}^h \bar{A}^{h-i} \bar{c} + e_h, \quad (3)$$

where $e_h = \sum_{i=1}^h \bar{A}^{h-i} \bar{\epsilon}_i$. The random term e_h is normally distributed with zero mean, and from the independence of $\bar{\epsilon}_i$ it follows that e_h has the variance matrix

$$\bar{\Sigma}_h = \sum_{i=1}^h \bar{A}^{h-i} \begin{bmatrix} \sum \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} (\bar{A}^T)^{h-i}.$$

A convenient feature of (3) is that the dimension of the random term never exceeds $7(k+1)$ even if h is increased. In the model of Koivu et al. (), $k = 1$, so the dimension will be at most 14.

We discretize the model (3) using integration quadratures as described in Pennanen and Koivu (2002). This results in scenario trees that converge weakly to the original process as the number of branches is increased. This technique is just as easy to implement as the better known method of conditional sampling, where a scenario tree with a given period structure $(\tau_1, \dots, \tau_T)$ and branching structure $(\nu_1, \dots, \nu_T)$ can be generated as follows; see e.g. Chiralaksanakul (2003). For each $t = 0, \dots, T$, denote by $\mathcal{N}_t$ the set of nodes in the scenario tree at stage t . The set $\mathcal{N}_0$ consists only of the root node which is labeled by 0. The rest of the nodes will be labeled by positive integers in the order they are generated. The number $h_t = 4\tau_t$ gives the length of period $[t-1, t]$ in quarters.

Set $m := 0$, $\bar{x}_m :=$ the current state of the world, and $\mathcal{N}_0 := \{m\}$.

for $t := 1$ **to** T

$\mathcal{N}_t := \emptyset$

for $n \in \mathcal{N}_{t-1}$

Draw a random sample of ν_t points $\{e_{h_t}^i\}_{i=1}^{\nu_t}$ from $N(0, \bar{\Sigma}_{h_t})$

for $i := 1$ **to** ν_t

$m := m + 1$

$\bar{x}_m = \sum_{i=1}^h \bar{A}^{h-i} \bar{c} + \bar{A}^h \bar{x}_n + e_{h_t}^i$

$\mathcal{N}_t := \mathcal{N}_t \cup \{m\}$

end

end

end

The random samples required above are easily generated by computing the spectral decomposition

$$\bar{\Sigma}_h = \sum_{i=1}^{7(k+1)} \lambda_h^i u_h^i (u_h^i)^T,$$

where λ_h^i are the eigenvalues of $\bar{\Sigma}_{h_t}$ in decreasing order and u_h^i are the corresponding eigenvectors. If $\bar{\Sigma}_{h_t}$ has rank d_t , we have

$$\bar{\Sigma}_h = C_h C_h^T,$$

where $C_h = [\sqrt{\lambda_h^1} u_h^1, \dots, \sqrt{\lambda_h^{d_t}} u_h^{d_t}]$, and then the desired sample is obtained as

$$e_{h_t}^i := C_h F_{d_t}^{-1}(u_{h_t}^i),$$

where $\{u_{h_t}^i\}_{i=1}^{v_t}$ is a random sample from U_{d_t} , the d_t -dimensional uniform distribution on $[0, 1]^{d_t}$ and F_{d_t} is the d_t -fold Cartesian product of univariate standard normal distribution functions. An advantage of computing the spectral decomposition (instead of the Cholesky decomposition as e.g. in Høyland et al. (2003)) is that when $\bar{\Sigma}_{h_t}$ is singular, d_t gives the true dimension of the random term. For example, when $h = 1$, $d_t = 7$.

The random samples $\{u_{h_t}^i\}_{i=1}^{v_t}$ above can be viewed as discrete approximations of U_{d_t} . As in Pennanen and Koivu (2002), we will replace these random samples by *low discrepancy point-sets* that have been designed to give good approximations of U_{d_t} . In the numerical tests in the next section we will use point-sets from the Sobol sequence; see for example Niederreiter (1992), Jäkel (2002). This produces a scenario tree with the same branching structure as the above conditional sampling procedure but a potentially better approximation of the original stochastic process, because the low discrepancy points are constructed to be more evenly distributed over U_{d_t} than typical random points. The computation times with Sobol sequences is roughly equal to that with Monte Carlo. Another advantage of using the spectral decomposition (instead of Cholesky decomposition) in forming the square root of the covariance matrix is that it allows for significant variance reduction in connection with low discrepancy point-sets; see e.g. Acworth et al. (1998).

5 Numerical results

5.1 Implementation

Figure 1 sketches the structure of the overall optimization system. The scenario generator (written in C programming language) takes as input the period and branching structures of the scenario tree and the time series model for the stochastic factors and generates the scenario tree for the assets and liabilities. The tree can be visually and otherwise inspected e.g. in spreadsheet programs until the outcomes are satisfactory. The scenario tree is then written into a text file in AMPL format described in Fourer et al. (2002). The optimization model written in AMPL modeling language and the data from the scenario generator are processed in AMPL and fed to MOSEK¹, which is an interior-point solver for convex (nonlinear) programs. The solution details and statistics produced by AMPL/MOSEK can again be visualized e.g. in spreadsheet programs. The system can be used under most Unix and Windows platforms.

¹ www.mosek.com

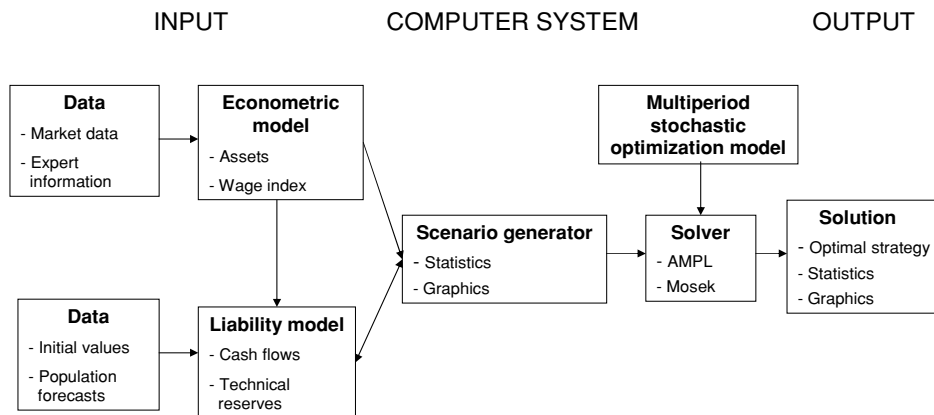


Fig. 1 Stochastic optimization system

Table 4 Shortfall penalty coefficients in the example

	γ_1	γ_2	γ_3
SP 1	1	10	10
SP 2	0.5	10	10
SP 3	1	1	1
SP 4	0.1	10	10
SP 5	0	0	0

5.2 Computational experiments

We chose the beginning of year 2002 as the first stage $t = 0$ in our experiments. The initial values for the time series model and the model parameters

$$h_0 = (1563, 622, 5573, 3914, 2158)$$

and $H_{-1} = 151.341$ (million euros) were chosen accordingly. As an example, we generated a scenario tree with period structure (1, 3, 6) years and branching structure (25, 10, 10) (2500 scenarios). This takes less than a second on Intel Pentium 4, 2.33GHz, with 1Gb of SDRam. Figure 2 plots the values of some important parameters on the scenario tree.

We solved the corresponding stochastic programming model for five sets of shortfall penalty coefficients given in Table 4. These (somewhat arbitrarily chosen) values correspond to different attitudes towards the attainment of the various target zones described in Subsection 2.3. In all cases we used the piecewise linear utility function

$$u^b(\cdot) = 1.5\gamma_2 \min\{\cdot, 0.01\}$$

for bonuses. The solution of the corresponding optimization models takes less than 10 seconds each. Figure 3 displays the optimal portfolio weights in stage $t = 0$ for the five sets of parameter choices. The first column gives the actual portfolio of the company in the beginning of year 2002. One can also examine the development of the optimized decision variables along the scenario tree. Figures 4 (a) and (b) plot the optimized C_t/L_t and H_t/L_t ratios, respectively, for SP1 of Table 4. The solvency capital C_t is always nonnegative (no bankruptcy) in every scenario while the bonus transfer/liability ratio H_t/L_t is equal to 0.01 in almost every scenario.

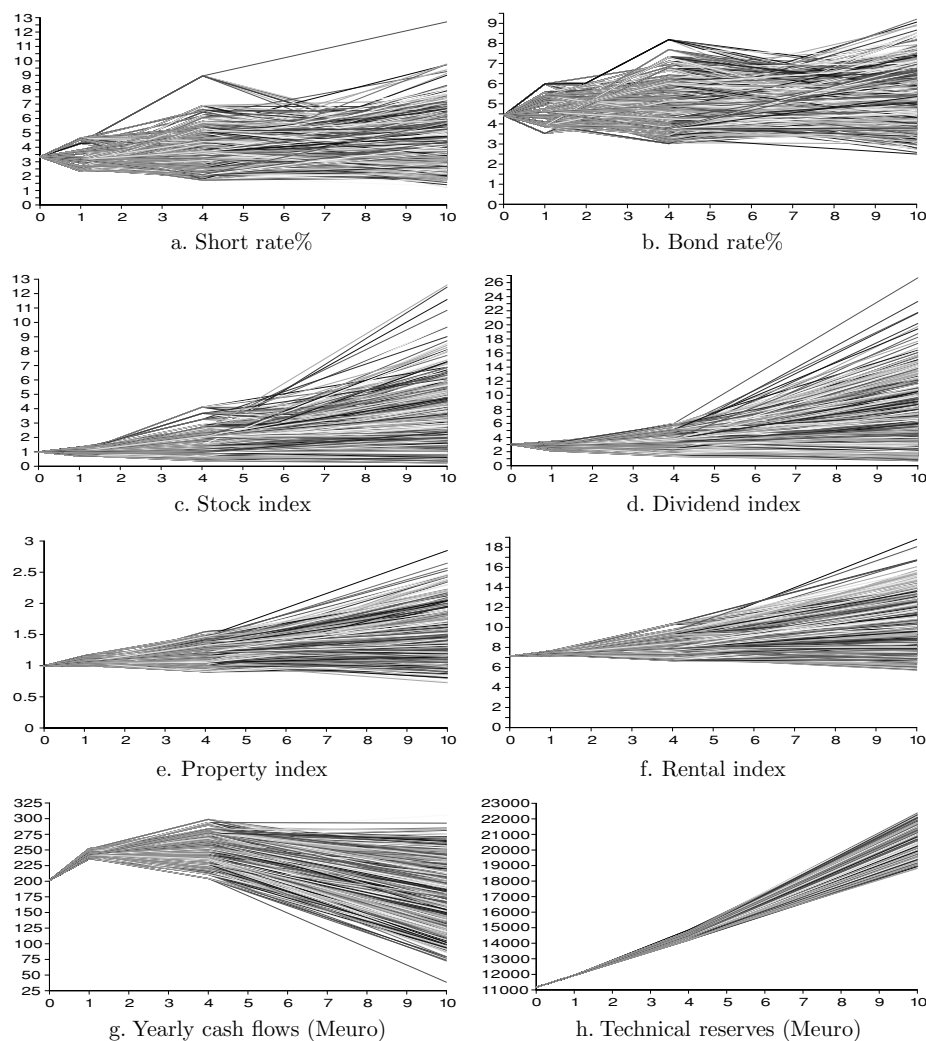


Fig. 2 Scenario tree of the example.

To gain some insight on the effect of the the shortfall penalties associated with the target zones, we solved the optimization model SP1 for varying levels of initial wealth w_0 . This was done by rescaling the initial portfolio so that the relative portfolio weights remained unchanged. The model was resolved and the optimized first stage portfolio recorded. The resulting portfolios are graphed in Figure 5 (a) as a function of the ratio w_0/L_0 . For comparison, we did the same for SP5, where there is no penalty for the shortfalls; see Figure 5 (b). The original wealth-liability ratio at the beginning of year 2002 was $w_0/L_0 = 1.238$.

Compared to SP5, the optimal portfolios for SP1 have considerably more wealth allocated to the short interest rate and bonds when $w_0/L_0 \leq 1.5$. This is natural since putting more wealth to the “safer” instruments reduces the solvency border and also the shortfalls. When w_0/L_0 approaches 2, the portfolios begin to look alike. This is caused by the fact that for high levels of initial wealth the probability of a shortfall is reduced and the effect of penalties becomes negligible. The most interesting phenomenon is that when the company approaches bankruptcy ($w_0/L_0 < 1$), it moves wealth from short interest rate to bonds and stocks, even

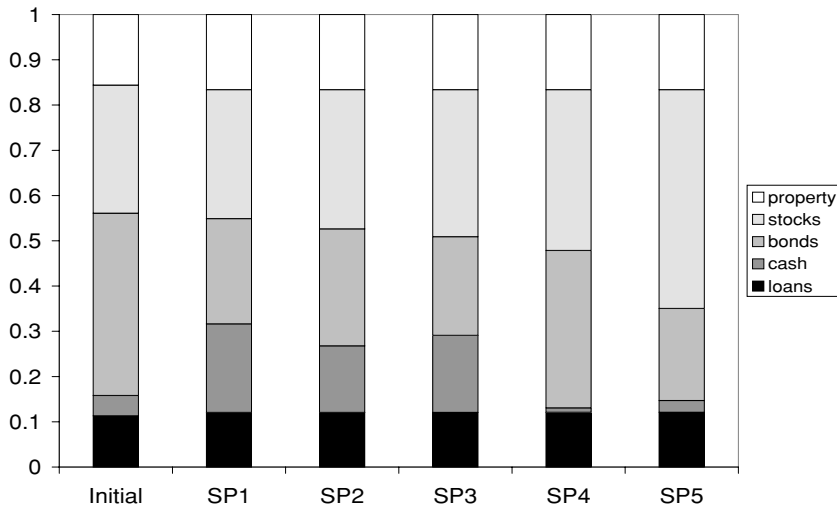


Fig. 3 Initial portfolio h^0 and the optimal portfolios corresponding to the parameter values in Table 4.

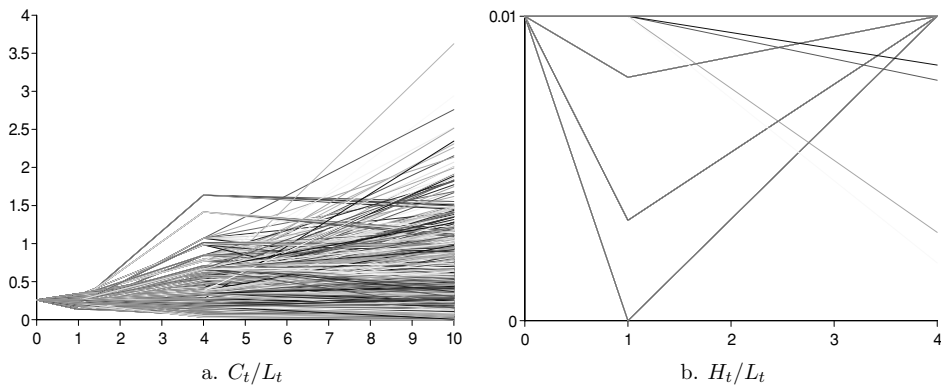


Fig. 4 Optimized solvency capital and bonus ratios along the scenario tree for SP1.

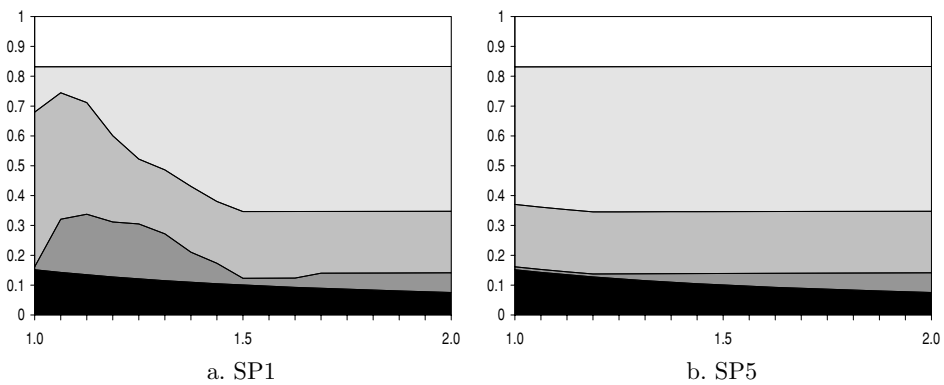


Fig. 5 The optimal first stage portfolio as a function of w_0/L_0 (The legend of Figure 3 applies).

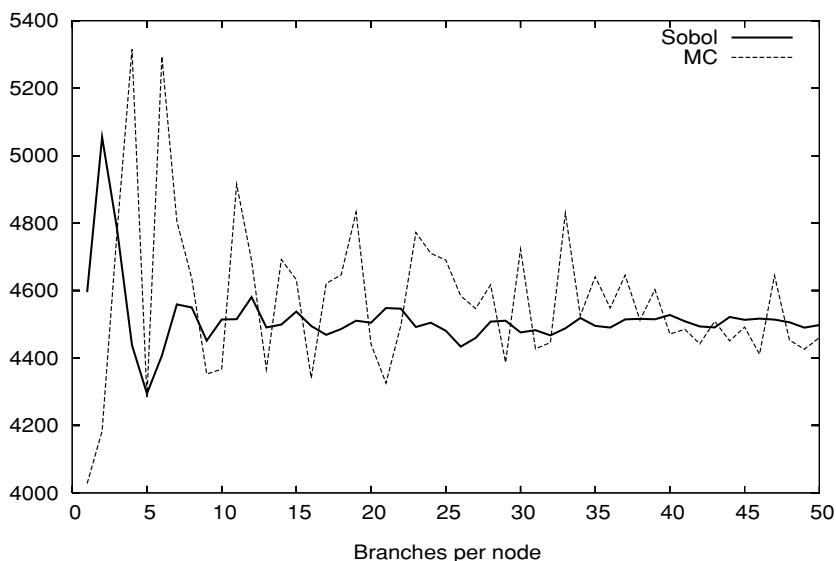


Fig. 6 Convergence of the optimal value

though this results in higher solvency border and higher shortfall penalties for the first two zones. This is probably due to the fact that the company is anticipating the solvency situation in later periods and trying to make safe portfolio allocations by ignoring to some extent the recommendations embodied in the definition of the solvency border.

5.3 Convergence of discretizations

Being forced to approximate the continuous distribution of the uncertain parameters by finite distributions, it is natural to ask how the corresponding optimization problems depend on the number of scenarios. A simple test is to study the behavior of the optimal values as the number of scenarios is increased. We will do the test for SP1 of Table 4 using the Sobol sequence as described in Section 4. For simplicity, we only considered fully symmetric scenario trees where each node has an equal number of branches, i.e. branching structure is (k, k, k) for $k = 1, 2, 3, \dots$. The solid line in Figure 6 plots the objective value as a function of the size of the scenario tree. For low values of k , the optimal value goes through large variations, but as k is increased the optimal value seems to stabilize. In fact, it stabilizes close to 4504 which is what we obtained with the branching structure $(25, 10, 10)$ in the above example. Convergence of discretizations of multistage stochastic programs has been studied for example by Olsen (1976), Casey and Sen (2003) and (Pennanen).

For comparison, we did the same test using Monte Carlo sampling in generating the scenario trees. This resulted in the dotted line in Figure 6. The optimal values obtained with Monte Carlo seem to converge too but not nearly as fast as the optimal values obtained with the Sobol sequence.

5.4 Out-of-sample test

We implemented an out-of-sample testing procedure to evaluate the performance of our stochastic programming model. Optimized strategies corresponding to the five sets of shortfall

penalty coefficients in Table 4 were compared with a variety of static fixed-mix and dynamic portfolio insurance (PI) strategies meeting the statutory restrictions of Table 1. The fixed-mix portfolio weights were chosen according to a grid in order to evenly cover the region of feasible portfolios.

In the PI strategies the portfolio weights for cash π_c and property π_p are varied according to the same rules as in the fixed-mix case. The rest of the wealth is divided between bonds and stocks and the proportion of stocks in the portfolio at time t is given by,

$$\pi_{s,t} = \begin{cases} \min \left\{ (1 - \pi_c - \pi_p) \min \left\{ \rho \frac{C_t}{w_t}, 1 \right\}, 0.5 \right\} & \text{if } C_t \geq 0, \\ 0 & \text{if } C_t < 0, \end{cases}$$

where ρ is a risk tolerance parameter indicating how the proportion invested in stocks increases with the company's solvency ratio, C_t/w_t . The percentage invested in stocks is a constant multiple of the company's solvency ratio, which was close to 22% initially, with higher values of ρ resulting in higher stock market allocations. When the company's solvency capital is negative the stock market allocation is set to zero and the remaining wealth is invested in bonds. PI strategy seems appropriate for a pension insurance company because it allocates more wealth to risky assets, stocks when the company's solvency ratio improves and reduces the stock market exposure as the company approaches insolvency.

As pointed out in the introduction, fixed-mix and PI strategies should not be considered as fully realistic decision rules. Rather, we view them as the first benchmarks that any practical decision support system should be able to outperform. Note however, that with these decision strategies, there is no guarantee that the transaction constraints will be satisfied. To simplify the comparison of different strategies, bonus transfers H_t were set to zero in each model. In addition, transaction costs were ignored in the case of fixed-mix and PI strategies to simplify computations. Note that this causes a bias in favor of the fixed-mix and PI strategies. The scenario trees used in optimization had the same structure as in the example of Section 5.1, that is, period structure (1, 3, 6) years and branching structure (25, 10, 10).

In the test, we evaluated the performance of each strategy over 325 randomly simulated scenarios of the stochastic parameters over 20 years. Portfolio rebalancing was made every year, i.e. fixed-mix portfolios are rebalanced to fixed proportions, PI portfolios are rebalanced and stochastic programming problems were solved with a new scenario tree, based on the current values of the stochastic parameters along the simulated scenario. We considered PI strategies with $\rho \in \{0.5, 1, \dots, 20\}$. The following describes the testing procedure. As outlined in Section 3, the stochastic factors in each year can be expressed in terms of a 14-dimensional vector. Below, $\bar{x}_{s,y}$ denotes the value of this vector in year y along a randomly generated scenario s .

for $s := 1$ **to** 325

Set $\bar{x}_{s,0} = \bar{x}_0$ (the current state of the world).

for $y := 0$ **to** 19

Generate a scenario tree rooted at $\bar{x}_{s,y}$.

Solve the corresponding optimization problems and rebalance all the portfolios.

Randomly sample $\bar{x}_{s,y+1}$ from the time series model and calculate the resulting portfolios and cash-flows at time $y + 1$.

end

end

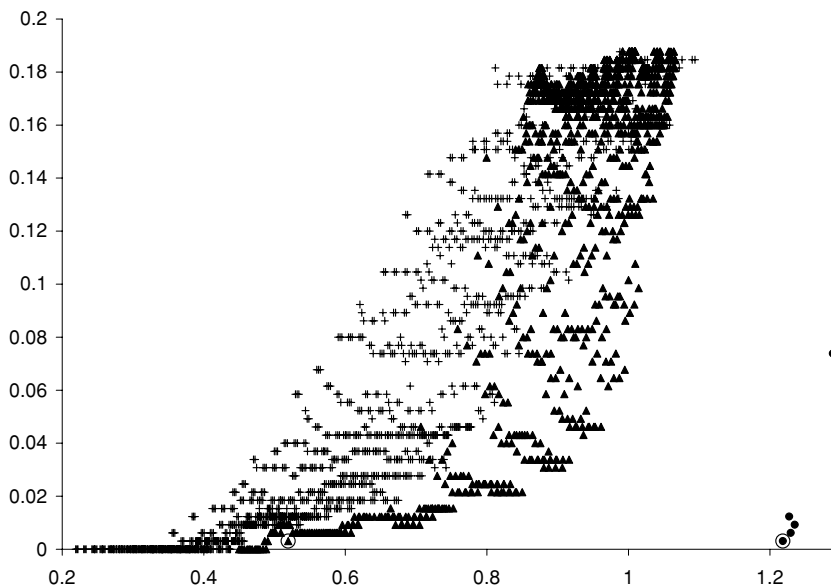


Fig. 7 C_T/L_T vs. bankruptcy probability for fixed-mix (+), PI (▲) and stochastic programming (●) strategies.

Figure 7 plots the performance of all the fixed-mix and PI strategies and the 5 stochastic programming strategies with respect to the average solvency capital at the end of the simulation period versus the bankruptcy probability during the period. Considering the main risk of the company, bankruptcy, and average solvency capital, the stochastic programming strategies clearly dominate both the fixed-mix and PI strategies, even though the probability of bankruptcy was not explicitly minimized. It is also worth noting that the best PI strategies outperform the best fixed-mix strategies at all reasonable risk levels. The riskiest stochastic programming strategy, SP5 of Table 4, went bankrupt in 25 simulations out of the 325 and the safest, SP1, in only one.

We will compare SP1 more closely with the best performing PI strategy circled in Figure 7, having the same bankruptcy probability as SP1. In the selected PI strategy $\pi_c = 0.04$, $\pi_p = 0.15$ and $\rho = 1$. The development of the solvency capital-reserves ratio for both strategies is described in Figure 8. The three lines represent the development of the sample average and the 95% confidence interval computed from the 325 scenarios. A higher mean and upwards skewed distribution indicates that the stochastic programming model can hedge against risks without losing profitability.

Figure 9 shows the distribution of the solvency capital-solvency border ratio C_t/B_t at the beginning of the second year. Due to the aim for high investment returns, the stochastic programming strategy avoids unnecessarily high levels of C_t/B_t , and consequently, it hits the lower border of the target zones frequently.

Figure 10 displays the development of the distribution of C_t/B_t in the 325 scenarios over the four zones defined in Subsection 2.3. If we compare the two strategies according to the target zones, the PI strategy seems to perform better than SP1. However, in the long run the stochastic programming strategy produces superior returns compared to the PI strategy, without increasing the company's bankruptcy risk.

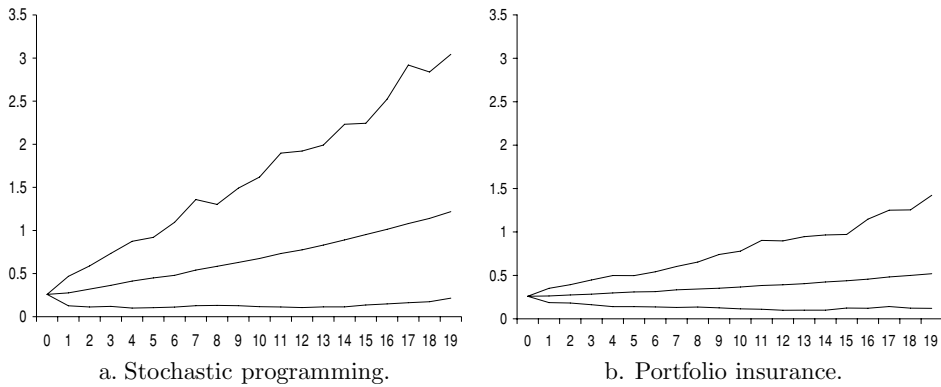


Fig. 8 C_t/L_t averages and 95% confidence intervals.

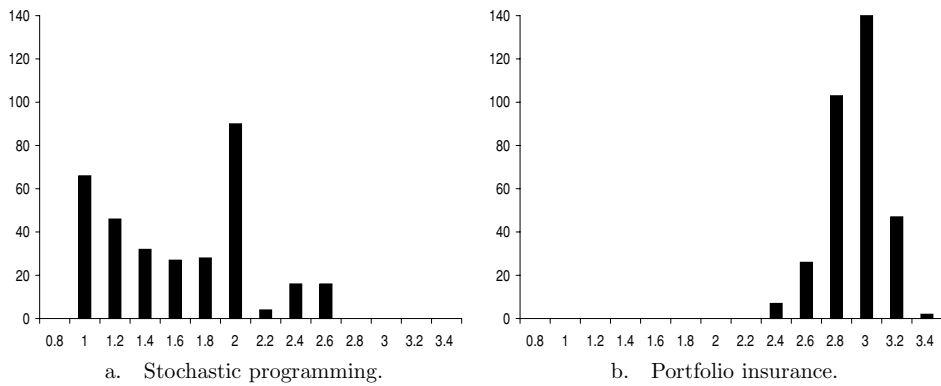


Fig. 9 Distribution of C_2/B_2 at the beginning of the second period.

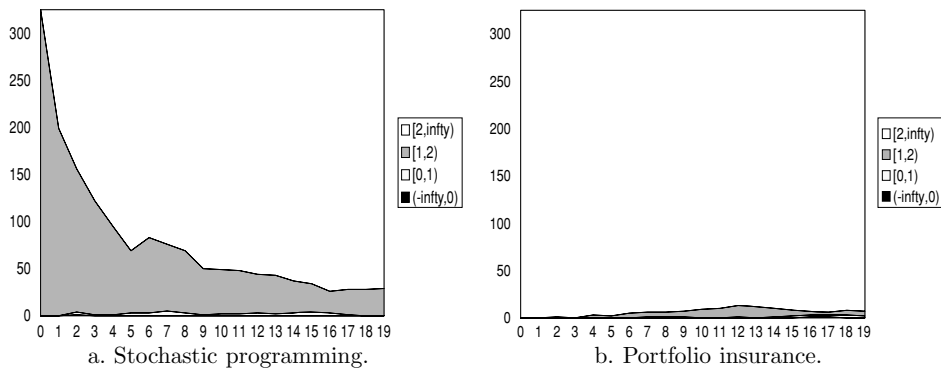


Fig. 10 Development of the distribution of C_t/B_t over the different zones.

6 Conclusion

This paper presented a stochastic programming model that was developed for asset-liability management of a Finnish pension insurance company. The modeling was done in two phases:

1. modeling of the decision problem, which included the specification of the decision variables, stochastic factors, objective and constraints,
 2. modeling of the stochastic factors. For this we used the model developed in Koivu et al.
- ()

This resulted in an infinite-dimensional stochastic optimization problem, which was solved in two steps:

1. discretization, which resulted in a finite dimensional optimization problem where the uncertainty was approximated by a scenario tree,
2. numerical solution of the discretized model. This was done using an algebraic modeling language and an interior point solver for nonlinear convex optimization.

Numerical results indicated that the model is robust and superior to more traditional ALM approaches.

Appendix

The parameters for the time series model described in Section 3 were estimated using full information maximum likelihood and are as follows. The number of lags $k = 1$,

$$\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0114 \\ 0.0114 \\ 0.007 \\ 0.007 \\ 0.009 \end{bmatrix}, \quad \mu = \ln \begin{bmatrix} 3.7 \\ 1.2 \\ 2.5 \\ 7.0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = 10^{-1} \begin{bmatrix} 3.672 & 3.467 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.855 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -59.11 \\ 0 & 0 & -2.425 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.629 & 0 & 3.617 & 0 & 0 \\ 0 & -0.209 & 0 & 0 & -0.663 & 8.533 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.638 & 8.712 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = 10^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0.964 & 0 & 0 \\ -1.061 & -1.499 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.449 & 0 \\ -0.238 & 0 & 0 & 0.637 \\ 0 & 0.080 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.024 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = 10^{-4} \begin{bmatrix} 53.711 & 7.155 & -4.795 & -15.978 & 0.112 & 0.273 & -0.233 \\ 7.155 & 55.719 & 10.741 & -11.647 & 0.228 & 0.465 & -0.263 \\ -4.795 & 10.741 & 116.726 & 45.187 & 6.345 & -0.587 & 0.126 \\ -15.978 & -11.647 & 45.187 & 62.235 & -1.042 & -0.218 & 0.517 \\ 0.112 & 0.228 & 6.345 & -1.042 & 2.752 & -0.007 & 0.003 \\ 0.273 & 0.465 & -0.587 & -0.218 & -0.007 & 0.167 & -0.018 \\ -0.233 & -0.263 & 0.126 & 0.517 & 0.003 & -0.018 & 0.033 \end{bmatrix}.$$

The initial values for the time series at the beginning of year 2002 were

$$x_0 = \ln \begin{bmatrix} 3.35 \\ 4.42 \\ 279.6 \\ 843.7 \\ 118.0 \\ 839.8 \\ 140.6 \end{bmatrix}, \quad x_{-1} = \ln \begin{bmatrix} 4.16 \\ 4.33 \\ 242.9 \\ 776.0 \\ 117.7 \\ 831.3 \\ 139.1 \end{bmatrix}.$$

References

- Acworth, P., M. Broadie, and P. Glasserman. (1998). "A Comparison of Some Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Techniques for Option Pricing." In: *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 1996 (Salzburg)*, Vol. 127 of *Lecture Notes in Statist.* New York: Springer, pp. 1–18.
- Anderson, R.G., D. Hoffman, and R.H. Rasche. (2000). "A Vector Error-Correction Forecasting Model of the U.S. Economy." Working paper 1998-008b, current version July 2000, Federal Reserve Bank of St. Louis.
- Black, F. and R. Jones. (1988). "Simplifying Portfolio Insurance for Corporate Pension Plans." *Journal of Portfolio Management* 14, 33–37.
- Campbell, J.Y., A.W. Lo, and A.C. MacKinlay. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. USA: Princeton University Press.
- Campbell, J.Y. and R. Shiller. (1987). "Cointegration and Tests of Present Value Models." *Journal of Political Economy* 95(5), 1062–1088.
- Cariño, D.R., D.H. Myers, and W.T. Ziemba. (1998). "Concepts, Technical Issues, and Uses of the Russell-Yasuda Kasai Financial Planning Model." *Operations Research* 46(4), 450–462.
- Cariño, D.R. and W.T. Ziemba. (1998). "Formulation of the Russell-Yasuda Kasai Financial Planning Model." *Operations Research* 46(4), 433–449.
- Casey, M. and S. Sen (2003). "The Scenario Generation Algorithm for Multistage Stochastic Linear Programs." Working paper, University of Arizona.
- Chiralaksanakul, A. (2003). "Monte Carlo Methods for Multi-stage Stochastic Programs." Ph.D. thesis, University of Texas at Austin, Austin, Texas.
- Chopra, V.K. and W.T. Ziemba. (1993). "The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice." *Journal of Portfolio Management* 19(2), 6–11.
- Clements, M.P. and D.F. Hendry. (1998). *Forecasting Economic Time Series*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Clements, M.P. and D.F. Hendry. (1999). *Forecasting Non-stationary Economic Time Series*. Cambridge, MA: MIT Press. With a foreword by Katarina Juselius.
- Consigli, G. and M.A.H. Dempster. (1998). "Dynamic Stochastic Programming for Asset-liability Management." *Annals of Operations Research* 81, 131–161.
- Dardis, T. and H. Mueller. (2001). "Reengineering ALM in North America." *Emphasis* (1), 22–25.
- Engle, R.F. and C.W.J. Granger. (1987). "Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing." *Econometrica* 55(2), 251–276.

- Fleten, S.E., K. Høyland, and S.W. Wallace. (2002). "The Performance of Stochastic Dynamic and Fixed Mix Portfolio Models." *European Journal of Operational Research* 140(1), 37–49.
- Föllmer, H. and A. Schied. (2002). *Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time*, Vol. 27 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Berlin: Walter de Gruyter & Co.
- Fourer, R., D.M. Gay, and B.W. Kernighan. (2002). *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*, 2nd edition. Duxbury Press.
- Geyer, A., W. Herold, K. Kontriner, and W.T. Ziemba. (2003). "The Innovest Austrian Pension Fund Financial Planning Model InnoALM." Working paper, University of British Columbia.
- Høyland, K. (1998). "Asset Liability Management for a Life Insurance Company: A Stochastic Programming Approach." Ph.D. Thesis, Norwegian University of Science and Technology.
- Høyland, K., M. Kaut, and S. Wallace. (2003). "A Heuristic for Moment-matching Scenario Generation." *Computational Optimization and Applications* 24, 169–186.
- Jäckel, P. (2002). *Monte Carlo Methods in Finance*. John Wiley & Sons.
- Johansen, S. (1995). *Likelihood-based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. New York: Oxford University Press.
- Koivu, M., T. Pennanen, and A. Ranne, "Modeling Assets and Liabilities of a Finnish Pension Insurance Company: A VEqC Approach." *Scandinavian Actuarial Journal*, to appear.
- Kouwenberg, R.. (2001). "Scenario Generation and Stochastic Programming Models for Asset Liability Management." *European Journal of Operational Research* 134(2), 279–292.
- Niederreiter, H. (1992). *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*, Vol. 63 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Nielsen, S.S. and S.A. Zenios. (1996). "A stochastic programming model for funding single premium deferred annuities." *Mathematical Programming* 75(2, Ser. B), 177–200.
- Olsen, P. (1976). "Discretizations of Multistage Stochastic Programming Problems." *Mathematical Programming Studies* (6), 111–124.
- Pennanen, T. (2005). "Epi-convergent Discretizations of Multistage Stochastic Programs." *Mathematical Operations Research*, 30, 245–256.
- Pennanen, T. and M. Koivu. (2002). "Integration Quadratures in Discretization of Stochastic Programs." *Stochastic Programming E-Print Series* (11).
- Perold, A.F. and W.F. Sharpe. (1988). "Dynamic Strategies for Asset Allocation." *Financial Analysts Journal* 44, 16–27.
- Zenios, S.A. and W.T. Ziemba (eds.). (2004). *Handbook of Asset Liability Management*, Handbooks in Finance. North Holland.
- Ziemba, W.T. and J.M. Mulvey (eds.). (1998). *Worldwide Asset and Liability Management*, Vol. 10 of *Publications of the Newton Institute*. Cambridge: Cambridge University Press.

A-SARJA: VÄITÖSKIRJOJA - DOCTORAL DISSERTATIONS. ISSN 1237-556X.

- A:229. PETER GABRIELSSON: Globalising Internationals: Product Strategies of ICT Companies. 2004. ISBN 951-791-825-9, ISBN 951-791-826-7 (Electronic dissertation).
- A:230. SATU NURMI: Essays on Plant Size, Employment Dynamics and Survival. 2004. ISBN 951-791-829-1, ISBN 951-791-830-5 (Electronic dissertation).
- A:231. MARJA-LIISA KURONEN: Vakuutusehtotekstin uudistamisprosessi, matkalla alamaisestä asiakkaaksi. 2004. ISBN 951-791-833-X, ISBN 951-791-834-8 (Electronic dissertation).
- A:232. MIKA KUISMA: Erilaistuminen vai samanlaistuminen? Vertaileva tutkimus paperiteollisuusyhtiöiden ympäristöjohtamisesta. 2004. ISBN 951-791-835-6, ISBN 951-791-836-4 (Electronic dissertation).
- A:233. ANTON HELANDER: Customer Care in System Business. 2004. ISBN 951-791-838-0.
- A:234. MATTI KOIVU: A Stochastic Optimization Approach to Financial Decision Making. 2004. ISBN 951-791-841-0, ISBN 951-791-842-9 (Electronic dissertation).
- A:235. RISTO VAITTINEN: Trade Policies and Integration – Evaluations with CGE -models. 2004. ISBN 951-791-843-7, ISBN 951-791-844-5 (Electronic dissertation).
- A:236. ANU VALTONEN: Rethinking Free Time: A Study on Boundaries, Disorders, and Symbolic Goods. 2004. ISBN 951-791-848-8, ISBN 951-791-849-6 (Electronic dissertation).
- A:237. PEKKA LAURI: Human Capital, Dynamic Inefficiency and Economic Growth. 2004. ISBN 951-791-854-2, ISBN 951-791-855-0 (Electronic dissertation).
- A:238. SAMI JÄRVINEN: Essays on Pricing Commodity Derivatives. 2004. ISBN 951-791-861-5, ISBN 951-791-862-3 (Electronic dissertation).
- A:239. PETRI I. SALONEN: Evaluation of a Product Platform Strategy for Analytical Application Software. 2004. ISBN 951-791-867-4, ISBN 951-791-868-2 (Electronic dissertation).
- A:240. JUHA VIRRANKOSKI: Essays in Search Activity. 2004. ISBN 951-791-870-4, ISBN 951-791-871-2 (Electronic dissertation).
- A:241. RAUNI SEPPOLA: Social Capital in International Business Networks. Confirming a Unique Type of Governance Structure. 2004. ISBN 951-791-876-3, ISBN 951-791-877-1 (Electronic dissertation).
- A:242. TEEMU SANTONEN: Four Essays Studying the Effects of Customization and Market Environment on the Business Success of Online Newspapers in Finland. 2004. ISBN 951-791-878-X, ISBN 951-791-879-8 (Electronic dissertation).
- A:243. SENJA SVAHN: Managing in Different Types of Business Nets: Capability Perspective. 2004. ISBN 951-791-887-9.

- A:244. JUKKA MÄKINEN: John Rawlsin oikeudenmukaisuuskäsityksen merkitys normatiiviselle taloustieteelle. 2004. ISBN 951-791-889-5, ISBN 951-791-890-9 (Electronic dissertation).
- A:245. ERJA KETTUNEN: Regionalism and the Geography of Trade Policies in EU-ASEAN Trade. 2004. ISBN 951-791-891-7, ISBN 951-791-892-5 (Electronic dissertation).
- A:246. OLLI-PEKKA RUUSKANEN: An Econometric Analysis of Time Use in Finnish Households. 2004. ISBN 951-791-893-3, ISBN 951-791-894-1 (Electronic dissertation).
- A:247. HILPPA SORJONEN: Taideorganisaation markkinaorientaatio. Markkinaorientaation edellytykset ja ilmeneminen esitystaideorganisaation ohjelmistosuunnittelussa. 2004. ISBN 951-791-898-4, ISBN 951-791-899-2 (Electronic dissertation).
- A:248. PEKKA KILLSTRÖM: Strategic Groups and Performance of the Firm - Towards a New Competitive Environment in the Finnish Telecommunications Industry. 2005. ISBN 951-791-904-2, ISBN 951-791-905-0 (Electronic dissertation).
- A:249. JUHANI YLIKERÄLÄ: Yrityshautomokokemuksen vaikutukset tradenomiopiskelijan yrittäjäuran syntyyn ja kehittymiseen. Yrityshautomotoiminta liiketalouden alan ammattikorkeakoulun yrittäjäkoulutuksessa. 2005. ISBN 951-791-910-7.
- A:250. TUURE TUUNANEN: Requirements Elicitation for Wide Audience End-Users. 2005. ISBN 951-791-911-5, ISBN 951-791-912-3 (Electronic dissertation).
- A:251. SAMULI SKURNIK: Suomalaisen talousmallin murros. Suljetusta sääntelytaloudesta kaksinaapaiseen globaalitalouteen. 2005. ISBN 951-791-915-8, ISBN 951-791-916-6 (Electronic dissertation).
- A:252. ATSO ANDERSÉN: Essays on Stock Exchange Competition and Pricing. 2005. ISBN 951-791-917-4, ISBN 951-791-918-2 (Electronic dissertation).
- A:253. PÄIVI J. TOSSAVAINEN: Transformation of Organizational Structures in a Multinational Enterprise. The case of an enterprise resource planning system utilization. 2005. ISBN 951-791-940-9, ISBN 951-791-941-7 (Electronic dissertation).
- A:254. JOUNI LAINE: Redesign of Transfer Capabilities. Studies in Container Shipping Services. 2005. ISBN 951-791-947-6, ISBN 951-791-948-4 (Electronic dissertation).
- A:255. GILAD SPERLING: Product, Operation and Market Strategies of Technology-Intensive Born Globals. The case of Israeli Telecommunication Born Globals. 2005. ISBN 951-791-954-9, ISBN 951-791-954-9 (Electronic dissertation).
- A:256. ARLA JUNTUNEN: The Emergence of a New Business Through Collaborative Networks – A Longitudinal Study In The ICT Sector. 2005. ISBN 951-791-957-3.
- A:257. MIRJAMI LEHIKONEN: Kuluttajan suhdemotivaatio päivittäistavaroihin. Miksi äiti liittyy Piltti-piiriin? 2005. ISBN 951-791-925-5, ISBN 951-791-926-3 (Electronic dissertation).
- A:258. JOUKO KINNUNEN: Migration, Imperfect Competition and Structural Adjustment. Essays on the Economy of the Åland Islands. 2005. ISBN 951-791-931-X, ISBN 951-791-932-8 (Electronic dissertation).
- A:259. KIRSTI KUISMA: Essays in Foreign Aid, Conflicts, and Development. 2005. ISBN 951-791-933-6, ISBN 951-791-960-3 (Electronic dissertation).

- A:260. SAMI KORTELAJAINEN: Innovating at the Interface. A Comparative Case Study of Innovation Process Dynamics and Outcomes in the Public-private Context. 2005
ISBN 951-791-938-7, ISBN 951-791-939-5 (e-version).
- A:261. TAINA VUORELA: Approaches to a Business Negotiation Case Study: Teamwork, Humour and Teaching. 2005. ISBN 951-791-962-X, ISBN 951-791-963-8 (e-version).
- A:262. HARRI TOIVONEN: Modeling, Valuation and Risk Management of Commodity Derivatives. 2005. ISBN 951-791-964-6, ISBN 951-791-965-4 (e-version).
- A:263. PEKKA SÄÄSKILAHTI: Essays on the Economics of Networks and Social Relations. 2005. ISBN 951-791-966-2, ISBN 951-791-967-0 (e-version).
- A:264. KATARIINA KEMPPAINEN: Priority Scheduling Revisited – Dominant Rules, Open Protocols, and Integrated Order Management. 2005.
ISBN 951-791-968-9, ISBN 951-791-969-7 (e-version).
- A:265. KRISTIINA KORHONEN: Foreign Direct Investment in a Changing Political Environment. Finnish Investment Decisions in South Korea. 2005.
ISBN 951-791-973-5, ISBN 951-791-974-3 (e-version).
- A:266. MARKETTA HENRIKSSON: Essays on Euro Area Enlargement. 2006. ISBN 951-791-988-3, ISBN 951-791-989-1 (e-version).
- A:267. RAIMO VOUTILAINEN: In Search for the Best Alliance Structure Banks and Insurance Companies. 2006. ISBN 951-791-994-8, ISBN 951-791-995-6 (e-version).
- A:268. ANTERO PUTKIRANTA: Industrial Benchmarks: From World Class to Best in Class. Experiences from Finnish Manufacturing at Plant Level. 2006. ISBN 951-791-996-4, ISBN 951-791-997-2 (e-version).
- A:269. ELINA OKSANEN-YLIKOSKI: Businesswomen, Dabblers, Revivalists, or Conmen? Representation of selling and salespeople within academic, network marketing practitioner and media discourses. 2006. ISBN 951-791-998-0, ISBN 951-791-99-9. (e-version).
- A:270. TUIJA VIRTANEN: Johdon ohjausjärjestelmät muuttuvassa toimintaympäristössä. 2006. ISBN 952-488-000-8, ISBN 952-488-001-6 (e-version).
- A:271. MERJA KARPPINEN: Cultural Patterns of Knowledge Creation. Finns and Japanese as Engineers and Poets. 2006. ISBN-10: 952-488-010-5, ISBN-13: 978-952-488-010.
E-version: ISBN-10: 952-488-011-3, ISBN-13: 978-952-488-011-4.
- A:272. AKSELI VIRTANEN: Biopoliittisen talouden kritiikki. 2006.
E-version: ISBN-10: 952-488-012-1, ISBN-13: 978-952-488-012-1.
- A:273. MARIA JOUTSENVIRTA: Ympäristökeskustelun yhteiset arvot. Diskurssianalyysi Enson ja Greenpeacen ympäristökirjoituksista. 2006.
ISBN-10: 952-488-013-X, ISBN-13: 978-952-488-013-8.
E-version: ISBN-10: 952-488-014-8, ISBN-13: 978-952-488-014-5.
- A:274. ELIAS RANTAPUSKA: Essays on Investment Decisions of Individual and Institutional Investors. 2006. ISBN-10: 952-488-029-6, ISBN-13: 978-952-488-029-9.
E-version: ISBN-10: 952-488-030-X, ISBN-13: 978-952-488-030-5.

- A:275. MIKKO JALAS: *Busy, Wise and Idle Time. A Study of the Temporalities of Consumption in the Environmental Debate.* 2006.
ISBN-10: 952-488-036-9, ISBN-13: 978-952-488-036-7.
E-version: ISBN-10: 952-488-037-7, ISBN-13: 978-952-488-037-4.
- A:276. ANNE ÄYVÄRI: *Käsityöyrittäjien verkosto-osaaminen.* 2006.
ISBN-10: 952-488-042-3, ISBN-13: 978-952-488-042-8.
- A:277. KRISTIINA MÄKELÄ: *Essays On Interpersonal Level Knowledge Sharing Within the Multi-national Corporation.* 2006.
ISBN-10: 952-488-045-8, ISBN-13: 978-952-488-045-9.
E-version: ISBN-10: 952-488-050-4, ISBN-13: 978-952-488-050-3.
- A:278. PERTTI PULKKINEN: *A Stepwise Refinement Approach to Approximating the Pareto Surface in Nonlinear Multiobjective Optimisation.* 2006.
ISBN-10: 952-488-054-7, ISBN-13: 978-952-488-054-1.
- A:279. SINIKKA PESONEN: *Luonto liiketoiminnassa ja ekologia elämäntavassa. Kertomuksia muutoksen mahdollisuuksista ja mahdottomuuksista.* 2006.
ISBN-10: 952-488-060-1, ISBN-13: 978-952-488-060-2.
E-version: ISBN-10: 952-488-061-X, ISBN-13: 978-952-488-061-9.
- A:280. HANNA KALLA: *Integrated Internal Communications in the Multinational Corporation.* 2006. ISBN-10: 952-488-063-6, ISBN-13: 978-952-488-063-3.
E-version: ISBN-10: 952-488-064-4, ISBN-13: 978-952-488-064-0.
- A:281. TAISTO KANGAS: *Suomen pankkikriisin alueellinen ulottuvuus. Esseitä paikallisista toimituksista ja toteuttajista.* 2006.
ISBN-10: 952-488-065-2, ISBN-13: 978-952-488-065-7.
- A:282. XAVIER CARPENTIER: *Essays on the Law and Economics of Intellectual Property.* 2006. ISBN-10: 952-488-067-9, ISBN-13: 978-952-488-067-1.
E-version: ISBN-10: 952-488-068-7, ISBN-13: 978-952-488-068-8.
- A:283. OLIVIER IRRMANN: *Intercultural Communication and the Integration of Cross-border Acquisitions.* 2006. ISBN-10: 952-488-069-5, ISBN-13: 978-952-488-069-5.
- A:284. ERKKI RÄTY: *Liiketoiminnan ja informaatiotekniikan strategisen linjakkuuden vaikutus suuryritysten IT:n tehokkuuteen.* 2006.
ISBN-10: 952-488-072-5, ISBN-13: 978-952-488-072-5.
- A:285. NIINA MALLAT: *Consumer and Merchant Adoption of Mobile Payments.* 2006.
ISBN-10: 952-488-077-6, ISBN-13: 978-952-488-078-7.
E-version: 952-488-078-4, ISBN-13: 978-952-488-078-7.
- A:286. ANU H. BASK: *Preconditions of Successful Supply Chain Relationships. Integrated Processes and Differentiated Services.* 2006.
ISBN-10: 952-488-079-2, ISBN-13: 978-952-488-079-4.
- A:287. TIMO JÄRVENSIVU: *Values-driven management in strategic networks: A case study of the influence of organizational values on cooperation.* 2007.
ISBN-10: 952-488-081-4, ISBN-13: 978-952-488-081-7.
- A:288. PETRI HILLI: *Riskinhallinta yksityisen sektorin työeläkkeiden rahoituksessa.* 2007.
ISBN-10: 952-488-085-7, ISBN-13: 978-952-488-085-5.

- B:47. PÄIVI KARHUNEN – RIITTA KOSONEN – MALLA PAAJANEN: Gateway-käsitteen elinkaari Venäjän-matkailussa. Etelä-Suomi Pietarin-matkailun väylänä. 2004. ISBN 951-791-846-1, korjattu painos.
- B:54. JARMO ERONEN: Kielten välinen kilpailu: Taloustieteellis-sosiolinguvistinen tarkastelu. 2004. ISBN 951-791-828-3.
- B:55. TAISTO MIETTINEN: Veron minimointi yritysjärjestelyissä. 2004. ISBN 951-791-856-9.
- B:56. SOILE TUORINSUO-BYMAN: Part-Time Work, Participation and Commitment. ISBN 951-791-866-6.
- B:57. PIIA HELISTE – RIITTA KOSONEN – KAROLIINA LOIKKANEN: Kaksoiskaupunkoja vai kaupunkipareja? Tapaustutkimukset: Helsinki–Tallinna, Tornio–Haaparanta, Imatra–Svetogorsk. 2004. ISBN 951-791-886-0.
- B:58. JARMO ERONEN: Central Asia – Development Paths and Geopolitical Imperatives. 2005 ISBN 951-791-906-9.
- B:59. RIITTA KOSONEN – MALLA PAAJANEN – NOORA REITTU: Etelä-Suomi venäläisten turistien länsimatkailussa. 2005. ISBN 951-791-942-5.
- B:60. KARI LILJA (ed.): The National Business System in Finland: Structure, Actors and Change. 2005. ISBN 951-791-952-2.
- B:61. HANNU KAIPIO – SIMO LEPPÄNEN: Distribution Systems of the Food Sector in Russia: The Perspective of Finnish Food Industry. 2005. ISBN 951-791-923-9, ISBN 951-791-924-7 (Electronic research reports).
- B:62. OLLI KOTILA: Strateginen henkilöstöjohtaminen ja yrityksen tuloksellisuus. Cranet-projekti. 2005. ISBN 951-791-934-4, ISBN 951-791-935-2 (Electronic research reports).
- B:63. KATARIINA JUVONEN – HELENA KANGASHARJU – PEKKA PÄLLI (toim.): Tulevaisuuspuhetta. 2005. ISBN 951-791-936-0, ISBN 951-791-937-9 (Electronic research reports).
- B:64. JOHANNA LOGRÉN – JOAN LÖFGREN: Koukussa yrittäjyyteen. Suomalaisten ja venäläisten naisyrittäjien motiiveja ja haasteita. 2005. ISBN 951-791-975-1, ISBN 951-791-976-X (e-version).
- B:65. HANS MÄNTYLÄ – PERTTI TIITTULA – MAARET WAGER (TOIM.): Pää hetkeksi pinnan alle. Akateeminen melontamatka. 2006. ISBN 951-791-982-4.
- B:66. KRISTIINA KORHONEN WITH ERJA KETTUNEN & MERVİ LIPPONEN: Development of Finno-Korean Politico-Economic Relations. 2005. 951-791-984-0, ISBN 951-791-985-9 (e-version).
- B:67. RIITTA KOSONEN – MALLA PAAJANEN – NOORA REITTU: Gateway-matkailu tuottaa uusia matkailualueita. 2006. ISBN 951-791-986-7, ISBN 951-791-987-5 (e-version).

- B:68. ANU H. BASK – SUSANNA A. SAIRANEN: Helsingin kauppakorkeakoulun tohtorit työelämässä. 2005. ISBN 951-791-991-3, ISBN 951-791-992-1 (e-version).
- B:69. OKSANA IVANOVA – HANNU KAIPIO – PÄIVI KARHUNEN–SIMO LEPPÄNEN – OLGA MASHKINA – ELMIRA SHARAFUTDINOVA – JEREMY THORNE: Potential for Enterprise Cooperation between Southeast Finland and Northwest Russia. 2006. ISBN 952-488-007-5.
- B:70. Virpi Serita (toim.) – Maria Holopainen – Liisa Koikkalainen – Jere Leppäniemi – Seppo Mallenius – Kari Nousiainen – Anu Penttilä – Outi Smedlund: Suomalais-japanilaista viestintää yrityselämässä. Haastattelututkimus yhteistoiminnan edellytyksistä suomalais-japanilaisessa liiketoimintaympäristössä. 2006.
ISBN-10: 952-488-015-6, ISBN-13: 978-952-488-015-2.
E-versio: ISBN-10 952-488-016-4, ISBN-13: 978-952-488-016-9.
- B:71. ARTO LINDBLOM: Arvoa tuottava kauppiasyrittäjyys ketjuliiketoiminnassa. 2006.
ISBN-10: 952-488-031-8, ISBN-13: 978-952-488-031-2.
E-versio: 952-488-032-6, ISBN-13: 978-952-488-032-9.
- B:72. Helsingin kauppakorkeakoulun tohtorit 2001-2006. 2006.
ISBN-10: 952-488-034-2, ISBN-13: 978-952-488-034-3.
E-versio: ISBN-10: 952-488-046-6, ISBN-13: 978-952-488-046-6.
- B:73. RIITTA KOSONEN – ALPO TANI: Kohti laajentuvia kotimarkkinoita vai rajallisia kasvukeskuksia? Suuret kaupunkiseudut ja suomalaisyritysten kansainvälistyminen Baltiassa. 2006.
ISBN-10: 952-488-038-5, ISBN-13: 978-952-488-038-1.
E-versio: ISBN-10: 952-488-039-3, ISBN-13: 978-952-488-039-8.
- B:74. KRISTIINA KORHONEN – ERJA KETTUNEN: Pohjoismaiset investoinnit Itä-Aasian tiikeritalouksissa. Kohdemaina Singapore, Hongkong, Etelä-Korea ja Taiwan. 2006
ISBN-10: 952-488-040-7, ISBN-13: 978-952-488-040-4.
E-versio: 952-488-041-5, ISBN-13: 978-952-488-041-1.
- B:75. SINIKKA VANHALA – MERJA KOLEHMAINEN (eds.): HRM – Between Performance and Employees. Proceedings from the HRM Conference in Helsinki, November 16, 2006. 2006.
ISBN-10: 952-488-074-1, ISBN-13: 978-952-488-074-9.
E-version: ISBN-10: 952-488-074-1, ISBN-13: 978-952-488-074-9.

E-SARJA: SELVITYKSIÄ - REPORTS AND CATALOGUES. ISSN 1237-5330.

- E:103. Research Catalogue 2002 – 2004. Projects and Publications. 2005.
ISBN 951-791-837-2.
- E:104. JUSSI KANERVA – KAIJA-STIINA PALOHEIMO (eds.): New Business Opportunities for Finnish Real Estate and ICT Clusters. 2005. ISBN 951-791-955-7.

- N:36. MAARIT UKKONEN: Yrittäjyysmotivaatio ja yrittäjyysasenteet Helsingin kauppakorkeakoulun BScBa -tutkinto-opiskelijoiden ja Mikkelin ammattikorkeakouluopiskelijoiden keskuudessa. 2004. ISBN 951-791-874-7.
- N:37. MIKKO SAARIKIVI: Helsingin kauppakorkeakoulun henkilöstön yrittäjyysmotivaatio ja yrittäjyysasenteet vuonna 2004. 2004. ISBN 951-791-882-8.
- N:38. MIKKO SAARIKIVI: Helsinki-Tallinn: The Twin City of Science Interreg III A Project. 2004. ISBN 951-791-883-6.
- N:39. MIKKO SAARIKIVI: Tieteen kaksoiskaupunki Helsinki-Tallinna Interreg III A -projekti. 2004. ISBN 951-791-884-4.
- N:40. TOM LAHTI: The Role of Venture Capital in Filling the Equity Gap. An Analysis of Policy Issues. 2004. ISBN 951-791-885-2.
- N:41. VESA KOKKONEN: Etelä-Savon yritysten ulkomaankauppa 2003. 2004. ISBN 951-791-897-6.
- N:42. MAARIT UKKONEN – MIKKO SAARIKIVI – ERKKI HÄMÄLÄINEN: Selvitys Uudenmaan yrityshautomoyritysten mentorointitarpeista. 2005. ISBN 951-791-900-X.
- N:43. JOHANNA LOGRÉN: Suomalaiset ja venäläiset naisyrittäjät. Naisyrittäjien yhteistyöohjelmien (vv. 2000-2004) vaikuttavuus. 2005. ISBN 951-791-945-X.
- N:44. VESA KOKKONEN: Yrittäjyyskoulutuksen vaikuttavuus. 2005. ISBN 951-791-971-9.
- N:45. VESA KOKKONEN: mikkelin ammattikorkeakoulun opetushenkilökunnan yrittäjyysasenteet. 2005. ISBN 951-791-972-7.
- N:46. SIRKKU REKOLA: Kaupallinen ystävällisyys - sosiaalinen vuorovaikutus päivittäistavarakaupan lähimyymän kilpailuetuna. 2006. ISBN 951-791-990-5.
- N:47. RIIKKA PIISPA – ASKO HÄNNINEN: Etelä-Savo ja näkökulmia e-työn kehittämiseen. Tutkimus e-työn tilasta ja e-työhankkeiden toteutusmahdollisuuksista etelä-savossa. 2006. ISBN 951-791-993-X.
- N:48. VESA KOKKONEN: Vientiohjelmien vaikuttavuus. 2006. ISBN 952-488-002-4.
- N:49. RAMI PIIPPONEN: Helsingin kauppakorkeakoulun opiskelijoiden ja sieltä vuonna 2000 valmistuneiden maistereiden yrittäjyysasenteet vuonna 2004. 2006. ISBN 952-488-004-0.
- N:50. VESA KOKKONEN: Oma yritys – koulutusohjelman vaikuttavuus. 2006. ISBN-10: 952-488-017-2, ISBN-13: 978-952-488-017-6.
- N:51. VESA KOKKONEN: Firma – koulutusohjelman vaikuttavuus. 2006. ISBN-10: 952-488-018-0, ISBN-13: 978-952-488-018-3.
- N:52. VESA KOKKONEN: Asiantuntijayrittäjyyden erikoispiirteet. 2006. ISBN-10: 952-488-019-9, ISBN-13: 978-952-488-019-0.

- N:53. MIKKO SAARIKIVI – VESA KOKKONEN: Pääkaupunkiseudun ja Hämeen ammattikorkeakoulujen alumnien yrittäjyysmotivaatio ja yrittäjyysasenteet vuonna 2005. 2006. ISBN-10: 952-488-024-5, ISBN-13: 978-952-488-024-4.
- N:54. MIKKO SAARIKIVI – VESA KOKKONEN: Yrittäjyysmotivaatio ja yrittäjyysasenteet ammatikorkeakouluissa vuonna 2005. Kansainväliset opiskelijat. 2006. ISBN-10: 952-488-025-3, ISBN-13: 978-952-488-025-1.
- N:55. MIKKO SAARIKIVI – VESA KOKKONEN: Yrittäjyysmotivaatio ja yrittäjyysasenteet pääkaupunkiseudun ja Hämeen ammattikorkeakouluissa vuonna 2005. Suomenkieliset opiskelijat. 2006. ISBN-10: 952-488-026-1, ISBN-13: 978-952-488-026-8.
- N:56. MIKKO SAARIKIVI – VESA KOKKONEN: Pääkaupunkiseudun ja Hämeen ammattikorkeakoulujen opetushenkilökunnan yrittäjyysasenteet. 2006. ISBN-10: 952-488-027-X, ISBN-13: 978-952-488-027-5.
- N:57. MIKKO SAARIKIVI – VESA KOKKONEN: Yrittäjyysmotivaatio ja yrittäjyysasenteet pääkaupunkiseudun ja Hämeen ammattikorkeakouluissa vuonna 2005. Mukana HAMKin sisäinen tutkimus. 2006. ISBN-10: 952-488-028-8, ISBN-13: 978-952-488-028-2.
- N:58. MIRVA NORÉN: PK-yrityksen johtajan rooli sosiaalisen pääoman edistäjänä. 2006. ISBN-10: 952-488-033-4, ISBN-13: 978-952-488-033-6.
- N:59. TOMI HEIMONEN – MARKKU VIRTANEN: Liiketoimintaosaaminen Itä-Suomessa. 2006. ISBN-10: 952-488-044-X, ISBN-13: 978-952-488-044-2.
- N:60. JOHANNA GRANBACKA – VESA KOKKONEN: Yrittäjyys ja innovaatioiden kaupallistaminen. Opintokokonaisuuden vaikuttavuus. 2006. ISBN-10: 952-488-057-1, ISBN-13: 978-952-488-057-2.
- N:61. VESA KOKKONEN: Startti! – Yrittäjänä koulutusohjelman vaikuttavuus. 2006. ISBN-10: 952-488-080-6, ISBN-13: 978-952-488-080-0.
- N:62. SOILE MUSTONEN: Yrittäjyysasenteet korkeakouluissa. Case-tutkimus Mikkelin ammattikorkeakoulun opettajien ja opiskelijoiden yrittäjyysasenteista. 2006. ISBN-10: 952-488-083-0, ISBN-13: 978-952-488-084-8.

W-SARJA: TYÖPAPEREITA - WORKING PAPERS . ISSN 1235-5674.
ELECTRONIC WORKING PAPERS, ISSN 1795-1828.

- W:363. OSSI LINDSTRÖM – ALMAS HESHMATI: Interaction of Real and Financial Flexibility: An Empirical Analysis. 2004. ISBN 951-791-827-5 (Electronic working paper).
- W:364. RAIMO VOUTILAINEN: Comparing alternative structures of financial alliances. 2004. ISBN 951-791-832-1 (Electronic working paper).
- W:365. MATTI KELOHARJU – SAMULI KNÜPFER – SAMI TORSTILA: Retail Incentives in Privatizations: Anti-Flipping Devices or Money Left on the Table? 2004. ISBN 951-791-839-9 (Electronic working paper).

- W:366. JARI VESANEN – MIKA RAULAS: Building Bridges for Personalization – A Process View. 2004. ISBN 951-791-840-2 (Electronic working paper).
- W:367. MAIJU PERÄLÄ: Resource Flow Concentration and Social Fractionalization: A Recipe for A Curse? 2004. ISBN 951-791-845-3 (Electronic working paper).
- W:368. PEKKA KORHONEN – RAIMO VOUTILAINEN: Finding the Most Preferred Alliance Structure between Banks and Insurance Companies. 2004. ISBN 951-791-847-X (Electronic working paper).
- W:369. ANDRIY ANDREEV – ANTTI KANTO: A Note on Calculation of CVaR for Student's Distribution. 2004. ISBN 951-791-850-X (Electronic working paper).
- W:370. ILKKA HAAPALINNA – TOMI SEPPÄLÄ – SARI STENFORS – MIKKO SYRJÄNEN – LEENA TANNER : Use of Decision Support Methods in the Strategy Process – Executive View. 2004. ISBN 951-791-853-4 (Electronic working paper).
- W:371. BERTTA SOKURA: Osaamispääoman ulottuvuudet. Arvoa luova näkökulma. 2004. ISBN 951-791-857-7 (Electronic working paper).
- W:372. ANTTI RUOTOISTENMÄKI – TOMI SEPPÄLÄ – ANTTI KANTO: Accuracy of the Condition Data for a Road Network. 2004. ISBN 951-791-859-3 (Electronic working paper).
- W:373. ESKO PENTTINEN: Bundling of Information Goods - Past, Present and Future. ISBN 951-791-864-X. (Electronic working paper).
- W:374. KASIMIR KALIVA – LASSE KOSKINEN: Modelling Bubbles and Crashes on the Stock Market. ISBN 951-791-865-8 (Electronic working paper).
- W:375. TEEMU SANTONEN: Evaluating the Effect of the Market Environment on the Business Success of Online Newspapers. 2004. ISBN 951-791-873-9 (Electronic working paper)
- W:376. MIKKO LEPPÄMÄKI – MIKKO MUSTONEN: Signaling with Externality. 2004. ISBN 951-791-880-1 (Elektronic working paper).
- W:377. MIKKO LEPPÄMÄKI – MIKKO MUSTONEN: Signaling and Screening with Open Source Programming. 2004. ISBN 951-791-881-X (Electronic working paper).
- W:378. TUURE TUUNANEN – KEN PEFFERS – CHARLES E. GENGLER: Wide Audience Requirements Engineering (Ware): A Practical Method And Case Study. 2004. ISBN 951-791-889-5. (Electronic working paper).
- W:379. LARS MATHIASSEN – TIMO SAARINEN – TUURE TUUNANEN – MATTI ROSSI: Managing Requirements Engineering Risks: An Analysis and Synthesis of the Literature. 2004. ISBN 951-791-895-X (Electronic working paper).
- W:380. PEKKA KORHONEN – LASSE KOSKINEN – RAIMO VOUTILAINEN: Finding the Most Preferred Alliance Structure between Banks and Insurance Companies from a Supervisory Point of View. 2004. ISBN-951-791-901-8 (Electronic working paper).
- W:381. PEKKA J. KORHONEN – PYY-ANTTI SIITARI: Using Lexicographic Parametric Programming for Identifying Efficient Units in Dea. 2004. ISBN 951-791-902-6. (Electronic working paper).

- W:382. PEKKA MALO – ANTTI KANTO: Evaluating Multivariate GARCH models in the Nordic Electricity Markets. 2005. ISBN 951-791-903-4 (Electronic working paper).
- W:383. OSSI LINDSTRÖM – ALMAS HESHMATI: Interacting Demand and Supply Conditions in European Bank Lending. 2005. ISBN 951-791-903-4 (Electronic working paper).
- W:384. ANTTI PIRJETÄ – ANTTI RAUTIAINEN: ESO valuation under IFRS 2 – considerations of agency theory, risk aversion and the binomial model. 2005. ISBN 951-791-920-4 (Electronic working paper).
- W:385. MIKA HYÖTYLÄINEN – HANNA ASIKAINEN: Knowledge Management in Designing and Developing ICT Consulting Services. 2005. ISBN 951-791-921-2 (Electronic working paper).
- W:386. PEKKA KORHONEN – LASSE KOSKINEN – RAIMO VOUTILAINEN: A Customer View on the Most Preferred Alliance Structure between Banks and Insurance Companies. 2005. ISBN 951-791-922-0 (Electronic working paper).
- W:387. MIIA ÄKKINEN: Conceptual Foundations of Online Communities. 2005. ISBN 951-791-959-X (Electronic working paper).
- W:388. ANDRIY ANDREEV – ANTTI KANTO – PEKKA MALO: Simple Approach for Distribution Selection in the Pearson System. 2005. ISBN 951-791-927-1 (Electronic working paper).
- W:389. ANDRIY ANDREEV – ANTTI KANTO – PEKKA MALO: On Closed-form Calculation of CVaR. 2005. ISBN 951-791-928-X (Electronic working paper).
- W:390. TUIJA VIRTANEN: Konsernijohtaminen parenting-teorian näkökulmasta. 2005. ISBN 951-791-929-8 (Electronic working paper).
- W:391. JARI VESANEN: What is Personalization? A Literature Review and Framework. 2005. ISBN 951-791-970-0 (Electronic working paper).
- W:392. ELIAS RANTAPUSKA: Ex-Dividend Day Trading: Who, How, and Why? 2005. ISBN 951-791-978-6 (Electronic working paper).
- W:393. ELIAS RANTAPUSKA: Do Investors Reinvest Dividends and Tender Offer Proceeds? 2005. ISBN 951-791-979-4 (Electronic working paper).
- W:394. ELIAS RANTAPUSKA: Which Investors are Irrational? Evidence from Rights Issues. 2005. ISBN 951-791-980-8 (Electronic working paper).
- W:395. PANU KALMI – ANTTI KAUKHANEN: Workplace Innovations and Employee Outcomes: Evidence from a Representative Employee Survey. 2005. ISBN 951-791-981-6 (Electronic working paper).
- W:396. KATHRIN KLAMROTH – KAISA MIETTINEN: Interactive Approach Utilizing Approximations of the Nondominated Set. 2005. ISBN 951-791-983-2 (Electronic working paper).
- W:397. MIKA HYÖTYLÄINEN – KRISTIAN MÖLLER: Key to Successful Production of Complex ICT Business Services. 2006. ISBN 952-488-003-2 (Electronic working paper).
- W:398. PANU KALMI: The Disappearance of Co-operatives from Economics Textbooks. 2006. ISBN 952-488-005-9 (Electronic working paper).

- W:399. ARTO LAHTI: The New Industrial Organization (IO) Economics of Growth Firms in Small Open Countries like Finland. 2006. ISBN 952-488-006-7 (Electronic working paper).
- W:400. MARKO MERISAVO: The Effects of Digital Marketing Communication on Customer Loyalty: An Integrative Model and Research Propositions. 2006. ISBN-10: 952-488-009-1, ISBN-13: 978-952-488-009-1 (Electronic working paper).
- W:401. MARJUT LOVIO – MIKA KUISMA: Henkilöstöraportointi osana yhteiskuntavastuuraportointia. Yritysten nykykäytäntöjen kehittäminen. 2006. ISBN-10: 952-488-020-2, ISBN-13: 978-952-488-020-6. (Electronic working paper).
- W:402. PEKKA MALO: Multifractality In Nordic Electricity Markets. 2006. ISBN-10: 952-488-048-2, ISBN-13: 978-952-488-048-0. (Electronic working paper).
- W:403. MARI NYRHINEN: IT Infrastructure: Structure, Properties and Processes. 2006. ISBN-10: 952-488-049-0, ISBN-13: 978-952-488-049-7.
- W:404. JUSSI HAKANEN – YOSHIAKI KAWAJIRI – KAISA MIETTINEN – LORENZ T. BIEGLER: Interactive Multi-Objective Optimization of Simulated Moving Bed Processes using IND-NIMBUS and IPOPT. 2006. ISBN-10: 952-488-055-5, ISBN-13: 978-952-488-055-8.
- W:405. JUSSI HAKANEN – PETRI ESKELINEN: Ideas of Using Trade-off Information in Supporting the Decision Maker in Reference Point Based Interactive Multiobjective Optimization. 2006. ISBN-10: 952-488-062-8, ISBN-13: 978-952-488-062-6.
- W:406. OUTI DORSÉN – PIA IKONEN – LAURA – JAKOBSSON – LAURA JOKINEN – JUKKA KAINULAINEN – KLAUS KANGASPUNTA – VISA KOSKINEN – JANNE LEINONEN – MINNA MÄKELÄINEN – HEIKKI RAJALA – JAANA SAVOLAINEN: The Czech Republic from the viewpoint of Finnish companies,expatriates and students. Report of the Special program study trip to Prague in spring 2006. 2006. ISBN-10: 952-488-070-9, ISBN-13: 978-952-488-070-1.
- W:407. KRISTIAN MÖLLER – ARTO RAJALA: Business Nets: Classification and Management Mechanisms. 2006. ISBN-10: 952-488-071-7, ISBN-13: 978-952-488-071-8.
- W:408. MIKA KUISMA – MARJUT LOVIO: EMAS- ja GRI-raportointi osana yhteiskuntavastuullisuutta. Jatkuvan parantamisen toteaminen yritysten raportoinnin avulla. 2006. ISBN-10: 952-488-075-X, ISBN-13: 978-952-488-075-6.
- W:409. HENRI RUOTSALAINEN – EEVA BOMAN – KAISA MIETTINEN – JARI HÄMÄLÄINEN: Interactive Multiobjective Optimization for IMRT. 2006. ISBN-10: 952-488-076-8, ISBN-13: 978-952-488-076-3.
- W:410. MARIANO LUQUE – KAISA MIETTINEN – PETRI ESKELINEN – FRANCISCO RUIZ: Three Different Ways for Incorporating Preference Information in Interactive Reference Point Based Methods. 2006. ISBN-10: 952-488-082-2, ISBN-13: 978-952-488-082-4.
- W:411. TIINA RITVALA – NINA GRANQVIST: Institutional Entrepreneurs and Structural Holes in New Field Emergence. Comparative Case Study of Cholesterol-lowering Functional Foods and Nanotechnology in Finland. 2006. ISBN-10: 952-488-084-9, ISBN-13: 978-952-488-084-8.

Y-SARJA: HELSINKI SCHOOL OF ECONOMICS.
CENTRE FOR INTERNATIONAL BUSINESS RESEARCH. CIBR RESEARCH PAPERS.
ISBN 1237-394X.

Y:8. REIJO LUOSTARINEN – MIKA GABRIELSSON: Globalization and Marketing Strategies of Born Globals in SMOPECs. 2004. ISBN 951-701-851-8.

Z-SARJA: HELSINKI SCHOOL OF ECONOMICS.
CENTRE FOR INTERNATIONAL BUSINESS RESEARCH. CIBR WORKING PAPERS. ISSN 1235-3931.

Z:10. V.H. MANEK KIRPALANI – MIKA GABRIELSSON: Need for International Intellectual Entrepreneurs and How Business Schools Can Help. 2004. ISBN 951-791-852-6.

Z:11. MIKA GABRIELSSON – PETER GABRIELSSON – ZUHAIR AL-OBADI – MARKKU SALIMÄKI – ANNA SALONEN: Globalization Impact on Firms and their Regeneration Strategies in High-tech and Knowledge Intensive Fields. 2006.
ISBN-10: 952-488-021-0, ISBN-13: 978-952-488-021-3.

Z:12. T.J. VAPOLA – PÄIVI TOSSAVAINEN — MIKA GABRIELSSON: Battleship Strategy: Framework for Co-opetition between MNCS and Born Globals in the High-tech Field. ISBN-10: 952-488-022-9, ISBN-13: 978-952-488-022-0.

Z:13. V. H. MANEK KIRPALANI – MIKA GABRIELSSON: Further Conceptualization Regarding Born Globals. 2006. ISBN-10: 952-488-023-7, ISBN-13: 978-952-488-023-7.

Z:14. MIKA GABRIELSSON – V. H. MANEK KIRPALANI: Globalization: What is New; Effective Global Strategies. 2006. ISBN-10: 952-488-059-8, ISBN-13: 978-952-488-059-6.

Z:15. TOMMI PELKONEN – MIKA GABRIELSSON: Market Expansion and Business Operation Mode Strategies of Born Internationals in the Digital Media Field. 2006.
ISBN-10: 952-488-058-X, ISBN-13: 978-952-488-058-9.

Kaikkia Helsingin kauppakorkeakoulun julkaisusarjassa ilmestyneitä julkaisuja voi tilata osoitteella:

KY-Palvelu Oy
Kirjakauppa
Runeberginkatu 14-16
00100 Helsinki
Puh. (09) 4313 8310, fax (09) 495 617
Sähköposti: kykirja@ky.hse.fi

Helsingin kauppakorkeakoulu
Julkaisutoimittaja
PL 1210
00101 Helsinki
Puh. (09) 4313 8579, fax (09) 4313 8305
Sähköposti: julkaisu@hse.fi

All the publications can be ordered from

Helsinki School of Economics
Publications officer
P.O.Box 1210
FIN-00101 Helsinki
Phone +358-9-4313 8579, fax +358-9-4313 8305
E-mail: julkaisu@hse.fi